Математика
Модуль 1. Векторы. Матрицы. СЛАУ
Лекция 1.1

Аннотация

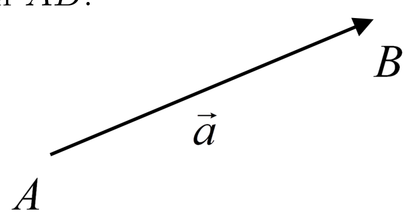
Геометрические векторы и их виды. Проекция вектора на ось. Линейные операции над векторами и их свойства. Линейная зависимость векторов. Базис. Координаты вектора в заданном базисе.

1 Векторы

Определение

Геометрический вектор – это отрезок с заданным направлением.

Обозначение: $\vec{a}$ или $\overrightarrow{AB}$.



Здесь A - начало вектора, B - конец вектора.

Определение

Длиной (или **модулем**) вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB.

Обозначение: $|\overrightarrow{AB}|$.

Определение

Вектор, длина которого равна нулю, называется **нулевым**.

Обозначение: $\vec{0}$.

Определение

Вектор, длина которого равна единице, называется **единичным**.

Обозначение: $\vec{e}$.

Определение

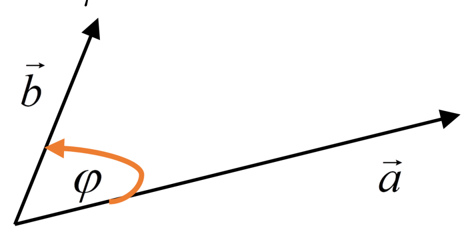
Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, называется **ортом** вектора $\vec{a}$.

Обозначение: $\overrightarrow{a}^0$.

Определение

Углом между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют наименьший из углов, образованных этими векторами при условии, что их начальные точки совпадают.

Обозначение: $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}$ или φ.

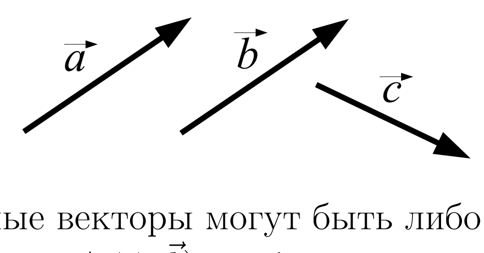


$$0 \leq \varphi \leq \pi$$

Определение

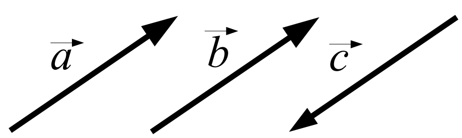
Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются **коллинеарными**, если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых.

Обозначение: $\vec{a}||\vec{b}$.



$\vec{a} \parallel \vec{b}$
$\vec{a} \nparallel \vec{c}$
$\vec{b} \nparallel \vec{c}$

Коллинеарные векторы могут быть либо **сонаправлены** (иметь одно направление, $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$), либо **противоположно направлены** ($\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$).



$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$
$\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{c}$
$\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{c}$

Определение

Три вектора в пространстве называются **компланарными,** если они лежат либо в одной плоскости, либо в параллельных плоскостях.

Определение

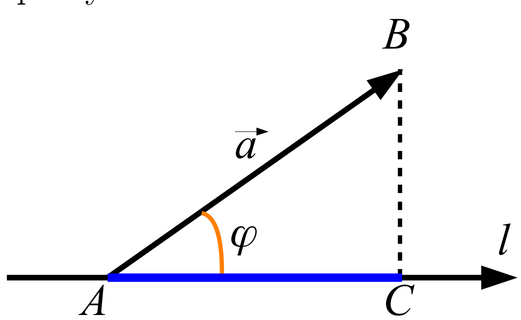
Два вектора называются **равными**, если они коллинеарны, сонаправлены и их длины равны.

Обозначение: $\vec{a} = \vec{b}$.

Определение

Осью называется прямая с указанными на ней направлением, началом отсчета и выбранной масштабной единицей.

Выберем в пространстве произвольную ось l и расположим произвольный вектор $\vec{a}$ так, что его начало A лежит на оси l. Из конца B вектора $\vec{a}$ опустим перпендикуляр на ось l и обозначим основание этого перпендикуляра буквой C.



Определение

Проекцией вектора $\vec{a}$ на ось l называется длина отрезка AC, взятая со знаком “плюс”, если угол φ между вектором $\vec{a}$ и осью l

острый, и со знаком “минус” в противном случае.

Обозначение: $\text{пр}_l\vec{a}$.

Из определения косинуса угла φ получается расчетная формула:

$$\text{пр}_l\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\varphi.$$

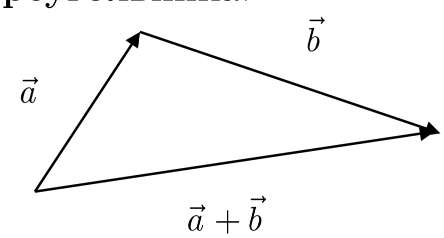
2 Линейные операции над векторами

Определение

Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, направленный из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$ при условии, что $\vec{b}$ приложен к концу $\vec{a}$.

Обозначение: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

Задаваемое определением правило сложения двух векторов носит название **правило треугольника**:



Определение

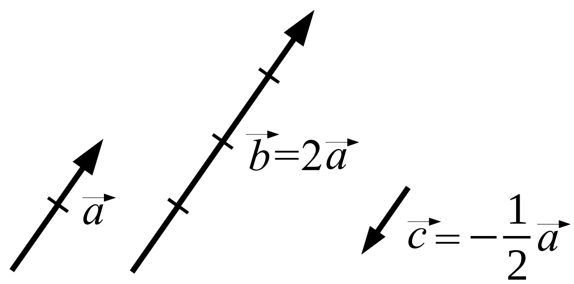
Произведением вектора $\vec{a}$ **на число** λ называется такой вектор $\vec{c}$, что

1) $|\vec{c}| = |\lambda|\,|\vec{a}|$;

2) $\vec{c} \uparrow\uparrow \vec{a}$, если $\lambda > 0$, и $\vec{c} \uparrow\downarrow \vec{a}$, если $\lambda < 0$.

Обозначение: $\vec{c} = \lambda\vec{a}$.

Примеры:



Определение

Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}=\vec{a}+(-\vec{b})$.

Обозначение: $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$.

Свойства линейных операций над векторами:

1) коммутативный закон
$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a},$$
2) ассоциативный закон
$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}),$$
3) дистрибутивный закон
$$\lambda\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b},$$
4) умножение на ноль
$$0\cdot\vec{a}=\vec{0},$$
5) сложение с нулевым вектором
$$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}.$$

3 Линейная зависимость векторов

Определение

Выражение $\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+...+\alpha_n\vec{a}_n$ называется **линейной комбинацией векторов** $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \ldots,\ \vec{a}_n$, где $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ - любые действительные числа, называемые **коэффициентами** линейной комбинации.

Определение

Линейная комбинация векторов называется **тривиальной**, если все ее коэффициенты равны нулю, и **нетривиальной**, если хотя бы один из коэффициентов отличен от нуля.

Определение

Система векторов $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \ldots,\ \vec{a}_n$ называется **линейно зависимой**, если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов, равная нулевому вектору.

Определение

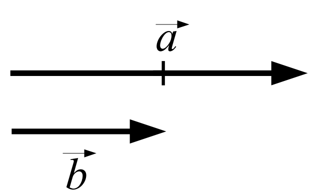
Система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ называется **линейно независимой**, если только их тривиальная линейная комбинация равна нулевому вектору.

Теорема (критерий линейной зависимости векторов)

Система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ линейно зависима тогда и только тогда, когда какой-либо из векторов этой системы можно представить в виде линейной комбинации остальных.

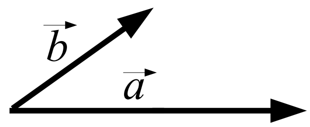
Примеры:

1.



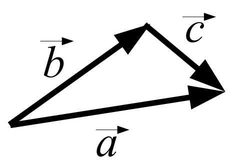
Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейно зависимы, т.к. вектор $\vec{a}$ можно выразить через вектор $\vec{b}$ в виде $\vec{a} = 2 \cdot \vec{b}$. В этом случае для векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно составить нетривиальную линейную комбинацию, равную нулевому вектору: $\vec{a} - 2 \cdot \vec{b} = \vec{0}$.

2.



Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейно независимы, т.к. вектор $\vec{a}$ нельзя выразить через вектор $\vec{b}$. Для векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно составить лишь тривиальную линейную комбинацию, равную нулевому вектору: $0 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} = \vec{0}$.

3.



Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ линейно зависимы, т.к. вектор $\vec{a}$ можно выразить через векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ в виде $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$. Тогда $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c} = \vec{0}$.

4 Базис

Определение

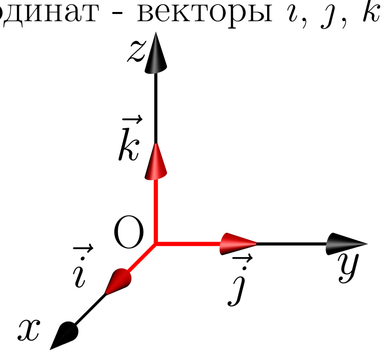
Базисом называется любая совокупность линейно независимых векторов, через которые можно выразить все остальные векторы.

Базисом на плоскости является совокупность любых двух линейно независимых векторов, лежащих в этой плоскости.

Базисом в пространстве является совокупность любых трех линейно независимых векторов.

Пусть векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ образуют базис в пространстве. Тогда любой вектор $\vec{x}$ пространства можно представить как линейную комбинацию этих векторов $\vec{x} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \alpha_3\vec{a}_3$. Такое представление вектора $\vec{x}$ называется **разложением вектора $\vec{x}$ в базисе** $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, а числа α_1, α_2, α_3 называются **координатами вектора $\vec{x}$ в этом базисе**.

На практике в основном используют базис декартовой прямоугольной системы координат - векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.



Разложение вектора по базису $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ записывается в двух эквивалентных формах:

$$\vec{x} = \alpha_1\vec{i} + \alpha_2\vec{j} + \alpha_3\vec{k} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3).$$

Действия над векторами в координатной форме:

Пусть даны векторы $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$.

Тогда:

1. При сложении векторов их одноименные координаты складываются

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z).$$

2. При умножении вектора на число координаты вектора умножаются на это число

$$\alpha \cdot \vec{a} = (\alpha \cdot a_x, \alpha \cdot a_y, \alpha \cdot a_z).$$

3. Два вектора равны тогда и только тогда, когда равны их координаты

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_x = b_x, a_y = b_y, a_z = b_z.$$

4. Координаты коллинеарных векторов пропорциональны

$$\vec{a}||\vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$