Математика
Модуль 1. Векторы. Матрицы. СЛАУ
Лекция 1.4

Аннотация

Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ): координатная и матричная формы записи, основные понятия. Критерий Кронекера – Капелли совместности СЛАУ. Решение СЛАУ по формулам Крамера и методом Гаусса.

1 Системы линейных алгебраических уравнений

Определение

Системой из m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными (сокращенно СЛАУ) называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1}$$

где числа a_{ij} $(i = 1, 2, ..., m,\ j = 1, 2, ..., n)$ - это **коэффициенты** системы, числа $b_1, \ldots, b_m$ - **свободные члены**, $x_1, \ldots, x_n$ - **неизвестные**, которые надо определить.

Запись СЛАУ в виде (1) называется **координатной**. Эту систему можно записать в **матричной** форме

$$A \cdot X = B, \tag{2}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ – матрица системы,}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ – столбец неизвестных,}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \text{ – столбец свободных членов.}$$

Определение

Расширенной матрицей системы (1) называется матрица $\widetilde{A}$ вида

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{matrix}}_{A} & \underbrace{\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{matrix}}_{B} \end{array} \right).$$

В этой матрице вертикальная черта используется исключительно для визуального выделения последнего столбца, какого-либо функционального значения она не имеет.

Определение

Система (1) называется **однородной**, если $b_1 = b_2 = ... = b_m = 0$, в противном случае она называется **неоднородной**.

Определение

Решением СЛАУ называется такой набор значений неизвестных $x_1^{(\circ)}, x_2^{(\circ)}, ..., x_n^{(\circ)}$, который при подстановке в каждое уравнение системы (1) обращает его в верное тождество.

Определение

Система (1) называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение и **несовместной**, если решений не имеет.

Определение

Совместная система называется **определенной,** если она имеет единственное решение, и **неопределенной**, если она имеет более одного решения. В последнем случае каждое конкретное решение называется **частным** решением системы.

Определение

Совокупность всех частных решений называется **общим** решением системы.

Замечание.

Однородная СЛАУ всегда совместна, поскольку нулевой набор значений ее неизвестных всегда является решением. Это решение называется **нулевым** или **тривиальным**.

2 Критерий совместности СЛАУ

Теорема Кронекера-Капелли (о совместности СЛАУ)

Для совместности системы (1) необходимо и достаточно, чтобы ранг ее матрицы A был равен рангу ее расширенной матрицы $\widetilde{A}$.

Для совместных СЛАУ верны следующие *утверждения*:

1. Если ранг матрицы совместной системы равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение.

2. Если ранг матрицы совместной системы меньше числа неизвестных, то система имеет бесчисленное множество решений.

3 Метод Крамера

Метод Крамера предназначен для решения совместных СЛАУ, у которых число уравнений равно числу неизвестных ($m = n$), и состоит из двух этапов:

1. Вычисляем определитель матрицы системы $\Delta = \det A$, а также n вспомогательных определителей Δ_1, Δ_2, ..., Δ_n, где Δ_k, $k = 1, 2, ..., n$ получается из определителя Δ путем замены в нем k-ого столбца на столбец свободных членов B:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & ... & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ b_n & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & ... & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & b_n & ... & a_{nn} \end{vmatrix}, ...$$

2. Находим значения неизвестных по формулам

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, ..., x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \tag{3}$$

Формулы (3) называются **формулами Крамера**, а метод решения по данным формулам – **методом Крамера**.

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 = 1. \end{cases}$$

Выписываем матрицы A и B:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$
находим определители
$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1, \; \Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7, \; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5,$$
и вычисляем значения неизвестных
$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{7}{-1} = -7, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-5}{-1} = 5.$$

4 Метод Гаусса

Методом Гаусса можно решать любые СЛАУ, включая те, в которых число уравнений отличается от числа неизвестных. Метод Гаусса условно можно разделить на два этапа:

1. Прямой ход.

На данном этапе исходная система уравнений с помощью элементарных преобразований приводится к равносильной системе ступенчатого вида.

2. Обратный ход.

Здесь последовательно, начиная с последнего уравнения полученной ступенчатой системы, находятся все неизвестные.

Пример. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 10, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = -4. \end{cases}$$
Выписываем матрицы A и B:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \end{pmatrix},$$
на их основе формируем расширенную матрицу системы:
$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 10 \\ 2 & -1 & 5 & -4 \end{array}\right)$$
и начинаем решение:

1. С помощью элементарных преобразований приводим расширенную матрицу системы к ступенчатому виду:
$$\widetilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & 10\\ 2 & -1 & 5 & -4\end{array}\right)\overset{(1)}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & 10\\ 0 & 3 & 3 & -24\end{array}\right)\overset{(2)}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & 10\\ 0 & 1 & 1 & -8\end{array}\right).$$
Сделаны следующие преобразования:
(1) первую строку умножили на 2 и вычли из второй,
(2) вторую строку разделили на 3.

2. Находим ранги матрицы системы A и расширенной матрицы системы $\widetilde{A}$. Ранг матрицы равен числу ненулевых строк эквивалентной ей ступенчатой матрицы, получающейся из данной матрицы в результате элементарных преобразований. Ступенчатая матрица для $\widetilde{A}$ получена в пункте 1. Ступенчатая матрица для A получается путем удаления из ступенчатой матрицы для $\widetilde{A}$ последнего столбца.
$$\text{Если } \widetilde{A}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & 10\\ 0 & 1 & 1 & -8\end{array}\right), \text{ то } A\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$
Получаем, что $r(A)=r(\widetilde{A})=2$. Следовательно, по теореме Кронекера-Капелли (см. раздел 2 лекции) система совместна, т.е. имеет решение.

Поскольку количество неизвестных $n=3$ больше ранга матрицы $r(A)$, то система имеет бесконечно много решений (см. утверждение 2 из раздела 2 лекции).

3. Из элементов получившейся в пункте 1 ступенчатой матрицы составляем отличный от нуля определитель порядка, равного рангу матрицы $r(A)$. В нашем случае необходимо составить определитель второго порядка. Для этого возьмем элементы первого и второго столбцов:
$$\begin{vmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0.$$
Если бы этот определитель оказался равен нулю, то нам было бы необходимо выбрать другие столбцы, исключая последний, соответ-

ствующий столбцу свободных членов.

4. Определяем **базисные** неизвестные, т.е. неизвестные, коэффициенты при которых располагаются во включенных в определитель столбцах. Поскольку мы включили в определитель первый и второй столбцы, то базисными неизвестными будут x_1 и x_2. Оставшуюся неизвестную x_3 будем называть **свободной**.

5. Выписываем систему уравнений, соответствующую полученной в пункте 1 ступенчатой матрице:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 10, \\ \qquad\quad x_2 + x_3 = -8. \end{cases}$$

6. Положим, что свободная неизвестная $x_3 = c$, где c - произвольная постоянная, и перенесем в системе уравнений слагаемые, содержащие свободную неизвестную, в правую часть уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 10 - c, \\ \qquad\quad x_2 = -8 - c. \end{cases}$$

Введение произвольной постоянной c обусловлено тем, что из двух уравнений мы можем однозначно найти лишь две неизвестные, в качестве которых выбираются базисные неизвестные x_1 и x_2. Свободная неизвестная x_3 может принимать любые значения, однозначно ее найти нельзя.

7. Последовательно, начиная с последнего уравнения системы найдем выражения базисных неизвестных через свободные:

$$x_2 = -8 - c,$$
$$x_1 = 10 - c + 2x_2 = -6 - 3c.$$

8. Выписываем решение:

$$\begin{cases} x_1 = -6 - 3c, \\ x_2 = -8 - c, \\ x_3 = c. \end{cases}$$

Данное решение является общим решением системы, т.е. содержит в себе все частные решения, которые получаются путем придания произвольной постоянной c конкретных значений. Например, положив $c = 0$, получим конкретное частное решение

$$\begin{cases} x_1 = -6, \\ x_2 = -8, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$