Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Математика

Модуль 1. Векторы. Матрицы. СЛАУ

Лекция 1.3

к.ф.-м.н. Семакин А.Н.

Ранг матрицы

Ранг матрицы

Любую строку произвольной матрицы A можно рассматривать как матрицу из одной строки.

Ранг матрицы

Любую строку произвольной матрицы A можно рассматривать как матрицу из одной строки. Например, матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Любую строку произвольной матрицы A можно рассматривать как матрицу из одной строки. Например, матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

состоит из двух строк

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix},$$
$$P_2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix},$$

Любую строку произвольной матрицы A можно рассматривать как матрицу из одной строки. Например, матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

состоит из двух строк

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix},$$
$$P_2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix},$$

рассматриваемых как отдельные однострочные матрицы.

Следовательно, к ним применимы определенные ранее правила сложения матриц и умножения матрицы на число:

Следовательно, к ним применимы определенные ранее правила сложения матриц и умножения матрицы на число:

$P_1 + P_2$

Ранг матрицы

Следовательно, к ним применимы определенные ранее правила сложения матриц и умножения матрицы на число:

$$P_1 + P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Следовательно, к ним применимы определенные ранее правила сложения матриц и умножения матрицы на число:

$$P_1 + P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1+3 & 2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \end{pmatrix},$$

Следовательно, к ним применимы определенные ранее правила сложения матриц и умножения матрицы на число:

$$P_1 + P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1+3 & 2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \end{pmatrix},$$

$$2 \cdot P_1$$

Следовательно, к ним применимы определенные ранее правила сложения матриц и умножения матрицы на число:

$$P_1 + P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1+3 & 2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \end{pmatrix},$$

$$2 \cdot P_1 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

Следовательно, к ним применимы определенные ранее правила сложения матриц и умножения матрицы на число:

$$P_1 + P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 1+3 & 2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \end{pmatrix},$$

$$2 \cdot P_1 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot1 & 2\cdot2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Определение

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ - действительные числа, $P_1, P_2, ..., P_n$, - строки матрицы A. Выражение $\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + ... + \alpha_n P_n$ называется **линейной комбинацией строк** $P_1, P_2, ..., P_n$ с коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$.

Определение
Линейная комбинация строк матрицы называется **тривиальной**, если все ее коэффициенты равны нулю, и **нетривиальной**, если хотя бы один из коэффициентов отличен от нуля.

Определение
Строки $P_1, P_2, ..., P_n$ матрицы A называются **линейно зависимыми**, если существует нетривиальная линейная комбинация этих строк, равная нулевой строке.

Определение
Строки $P_1, P_2, \ldots, P_n$ матрицы A называются **линейно независимыми**, если только их тривиальная линейная комбинация равна нулевой строке.

Определение

Рангом матрицы A называется максимальное число ее линейно независимых строк.

Ранг матрицы

Определение

Рангом матрицы A называется максимальное число ее линейно независимых строк.

Обозначение: $rangA$, $r(A)$, r.

Ранг матрицы

Примеры:

Примеры:

1. Матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

состоит из двух линейно зависимых строк

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } P_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix},$$

т.к. для них можно составить нетривиальную линейную комбинацию, равную нулевой строке:

т.к. для них можно составить нетривиальную линейную комбинацию, равную нулевой строке:

$$2 \cdot P_1 - P_2$$

т.к. для них можно составить нетривиальную линейную комбинацию, равную нулевой строке:

$$2 \cdot P_1 - P_2 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Ранг матрицы

т.к. для них можно составить нетривиальную линейную комбинацию, равную нулевой строке:

$$2 \cdot P_1 - P_2 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 - 2 & 2 \cdot 2 - 4 \end{pmatrix}$$

т.к. для них можно составить нетривиальную линейную комбинацию, равную нулевой строке:

$$2 \cdot P_1 - P_2 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 1 - 2 & 2\cdot 2 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

т.к. для них можно составить нетривиальную линейную комбинацию, равную нулевой строке:

$$2 \cdot P_1 - P_2 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 2{\cdot}1{-}2 & 2{\cdot}2{-}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Соответственно, $rangA = 1$.

2. Матрица

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

состоит из трех строк

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix},\ P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы

Строки P_2 и P_3 линейно зависимы,

Ранг матрицы

Строки P_2 и P_3 линейно зависимы, т.к.

$$2 \cdot P_2 - P_3$$

Ранг матрицы

Строки P_2 и P_3 линейно зависимы, т.к.

$$2 \cdot P_2 - P_3 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Строки P_2 и P_3 линейно зависимы, т.к.

$$2 \cdot P_2 - P_3 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 - 0 & 2 \cdot 1 - 2 \end{pmatrix}$$

Строки P_2 и P_3 линейно зависимы, т.к.

$$2 \cdot P_2 - P_3 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 0 - 0 & 2\cdot 1 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Ранг матрицы

Строки P_2 и P_3 линейно зависимы, т.к.

$$2 \cdot P_2 - P_3 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 2{\cdot}0{-}0 & 2{\cdot}1{-}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а строки P_1 и P_2 линейно независимы,

Ранг матрицы

Строки P_2 и P_3 линейно зависимы, т.к.

$$2 \cdot P_2 - P_3 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix} = $$
$$= \begin{pmatrix} 2{\cdot}0{-}0 & 2{\cdot}1{-}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а строки P_1 и P_2 линейно независимы, т.к. только их тривиальная линейная комбинация равна нулевой строке:

Строки P_2 и P_3 линейно зависимы, т.к.

$$2 \cdot P_2 - P_3 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 - 0 & 2 \cdot 1 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а строки P_1 и P_2 линейно независимы, т.к. только их тривиальная линейная комбинация равна нулевой строке:

$$0 \cdot P_1 + 0 \cdot P_2$$

Ранг матрицы

Строки P_2 и P_3 линейно зависимы, т.к.

$$2 \cdot P_2 - P_3 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 2{\cdot}0{-}0 & 2{\cdot}1{-}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а строки P_1 и P_2 линейно независимы, т.к. только их тривиальная линейная комбинация равна нулевой строке:

$$0 \cdot P_1 + 0 \cdot P_2 = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Строки P_2 и P_3 линейно зависимы, т.к.

$$2\cdot P_2 - P_3 = 2\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & 2\end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix}2{\cdot}0{-}0 & 2{\cdot}1{-}2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix},$$

а строки P_1 и P_2 линейно независимы, т.к. только их тривиальная линейная комбинация равна нулевой строке:

$$0\cdot P_1 + 0\cdot P_2 = 0\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix}0{\cdot}1{+}0{\cdot}0 & 0{\cdot}0{+}0{\cdot}1\end{pmatrix}$$

Строки P_2 и P_3 линейно зависимы, т.к.

$$2 \cdot P_2 - P_3 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 - 0 & 2 \cdot 1 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а строки P_1 и P_2 линейно независимы, т.к. только их тривиальная линейная комбинация равна нулевой строке:

$$0 \cdot P_1 + 0 \cdot P_2 = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы

В то же время все три строки P_1, P_2 и P_3 будут линейно зависимы,

Ранг матрицы

В то же время все три строки P_1, P_2 и P_3 будут линейно зависимы, т.к. для них можно составить нетривиальную линейную комбинацию, равную нулевой строке:

Ранг матрицы

В то же время все три строки P_1, P_2 и P_3 будут линейно зависимы, т.к. для них можно составить нетривиальную линейную комбинацию, равную нулевой строке:

$$0 \cdot P_1 + 2 \cdot P_2 - P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В то же время все три строки P_1, P_2 и P_3 будут линейно зависимы, т.к. для них можно составить нетривиальную линейную комбинацию, равную нулевой строке:

$$0 \cdot P_1 + 2 \cdot P_2 - P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Соответственно, $rangB = 2$.

Наиболее распространенным методом определения ранга произвольной матрицы является **метод элементарных преобразований**, опирающийся на следующие две теоремы.

Ранг матрицы

Теорема (о ранге матрицы при элементарных преобразованиях)

Теорема (о ранге матрицы при элементарных преобразованиях)
Ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях.

Теорема (о ранге ступенчатой матрицы)

Ранг матрицы

Теорема (о ранге ступенчатой матрицы)
Ранг ступенчатой матрицы равен количеству ненулевых строк.

Метод элементарных преобразований для определения ранга произвольной матрицы:

Метод элементарных преобразований для определения ранга произвольной матрицы:

1. С помощью элементарных преобразований приводим данную матрицу к ступенчатому виду.

Ранг матрицы

Метод элементарных преобразований для определения ранга произвольной матрицы:

1. С помощью элементарных преобразований приводим данную матрицу к ступенчатому виду.
2. Определяем ранг исходной матрицы как количество ненулевых строк в получившейся ступенчатой матрице.

Определитель матрицы

Определитель матрицы

Определитель является характеристикой исключительно квадратных матриц.

Определитель матрицы

Определитель является характеристикой исключительно квадратных матриц.

Определение

Определителем квадратной матрицы называется число, вычисляемое по заданному правилу из элементов данной матрицы.

Определитель матрицы

Если $A = (a_{ij})$ - это квадратная матрица порядка n,

Определитель матрицы

Если $A = (a_{ij})$ - это квадратная матрица порядка n, то ее определитель называется определителем n-го порядка и записывается в виде:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Определитель матрицы

Если $A = (a_{ij})$ - это квадратная матрица порядка n, то ее определитель называется определителем n-го порядка и записывается в виде:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Краткие обозначения: $\det A$, ΔA, $|A|$.

Определитель матрицы

Приведем правила вычисления определителей порядков 1, 2 и 3:

Определитель матрицы

Приведем правила вычисления определителей порядков 1, 2 и 3:

1. $n = 1$

Определитель матрицы

Приведем правила вычисления определителей порядков 1, 2 и 3:

1. $n = 1$

$A = (a_{11})$ - матрица, состоящая только из одного элемента a_{11}.

Определитель матрицы

Приведем правила вычисления определителей порядков 1, 2 и 3:

1. $n = 1$

$A = (a_{11})$ - матрица, состоящая только из одного элемента a_{11}. Тогда $\det A = a_{11}$.

Определитель матрицы

Приведем правила вычисления определителей порядков 1, 2 и 3:

1. $n = 1$

$A = (a_{11})$ - матрица, состоящя только из одного элемента a_{11}. Тогда $\det A = a_{11}$.

Пример:

$A = (3), \det A = 3.$

Определитель матрицы

2. $n = 2$

Определитель матрицы

2. $n = 2$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

Определитель матрицы

2. $n = 2$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

$\det A$

Определитель матрицы

2. $n = 2$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Определитель матрицы

2. $n = 2$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Определитель матрицы

2. $n = 2$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Определитель 2-ого порядка вычисляется как произведение элементов главной диагонали минус произведение элементов побочной диагонали.

Пример:

Определитель матрицы

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix},$$

Определитель матрицы

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\det A$$

Определитель матрицы

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\det A = \begin{vmatrix} \color{red}{1} & \color{blue}{2} \\ \color{blue}{3} & \color{red}{5} \end{vmatrix}$$

Определитель матрицы

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 3 \cdot 2 = -1.$$

Определитель матрицы

3. $n = 3$

Определитель матрицы

3. $n = 3$

$\det A$

Определитель матрицы

3. $n = 3$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Определитель матрицы

3. $n = 3$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} -$$
$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}.$$

3. $n = 3$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} -$$
$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}.$$

Данная формула называется **правилом треугольников**.

Определитель матрицы

Название формулы обусловлено ее **геометрической интерпретацией**.

Определитель матрицы

Элементы со знаком «+»

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13}$$

$$+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

Элементы со знаком «+»

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13}$$

$$+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

Элементы со знаком «+»

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13}$$

$$+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

Определитель матрицы

Элементы со знаком «+»

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13}$$

$$+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

Определитель матрицы

Элементы со знаком «+»

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13}$$

$$+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

Определитель матрицы

Элементы со знаком «-»

$$-a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

$$-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Определитель матрицы

Элементы со знаком «-»

$$-a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

$$-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Элементы со знаком «-»

$$-a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

$$-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Элементы со знаком «-»

$$-a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

$$-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Определитель матрицы

Элементы со знаком «-»

$$-a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

$$-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \color{blue}{a_{13}} \\ a_{21} & \color{blue}{a_{22}} & a_{23} \\ \color{blue}{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad -\begin{vmatrix} a_{11} & \color{blue}{a_{12}} & a_{13} \\ \color{blue}{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \color{blue}{a_{33}} \end{vmatrix}$$

$$-\begin{vmatrix} \color{blue}{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \color{blue}{a_{23}} \\ a_{31} & \color{blue}{a_{32}} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Пример:

Определитель матрицы

Пример:

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

Определитель матрицы

Пример:

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 5 \cdot 1 \cdot 3$$

Определитель матрицы

Пример:

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & \color{blue}{2} & 1 \\ 3 & 1 & \color{blue}{4} \\ \color{blue}{6} & 0 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 5 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot 6$$

Определитель матрицы

Пример:

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 5 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot 6 + 3 \cdot 0 \cdot 1$$

Пример:

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 5 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot 6 + 3 \cdot 0 \cdot 1 -$$
$$-6 \cdot 1 \cdot 1$$

Пример:

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 5 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot 6 + 3 \cdot 0 \cdot 1 -$$
$$-6 \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \cdot 3$$

Определитель матрицы

Пример:

$$\det A = \begin{vmatrix} \color{blue}{5} & 2 & 1 \\ 3 & 1 & \color{blue}{4} \\ 6 & \color{blue}{0} & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 5 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot 6 + 3 \cdot 0 \cdot 1 -$$
$$- 6 \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \cdot 3 - 5 \cdot 0 \cdot 4$$

Определитель матрицы

Пример:

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 5 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot 6 + 3 \cdot 0 \cdot 1 -$$

$$-6 \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \cdot 3 - 5 \cdot 0 \cdot 4 =$$

$$= 39.$$

Свойства определителей

Свойства определителей

1. Определитель не изменится, если к элементам какой-либо строки (столбца) прибавить соответствующие элементы параллельной строки (столбца), умноженные на любое число.

Свойства определителей

1. Определитель не изменится, если к элементам какой-либо строки (столбца) прибавить соответствующие элементы параллельной строки (столбца), умноженные на любое число.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+\alpha\cdot a_{21} & a_{12}+\alpha\cdot a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

2. При перестановке местами двух параллельных строк (столбцов) знак определителя меняется на противоположный.

Свойства определителей

2. При перестановке местами двух параллельных строк (столбцов) знак определителя меняется на противоположный.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}$$

3. Общий множитель элементов какой-либо строки (столбца) определителя можно вынести за знак определителя.

Свойства определителей

3. Общий множитель элементов какой-либо строки (столбца) определителя можно вынести за знак определителя.

$$\begin{vmatrix} \alpha \cdot a_{11} & \alpha \cdot a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \alpha \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

4. Если элементы какой-либо строки (столбца) определителя представляют собой суммы двух слагаемых, то определитель может быть разложен на сумму соответствующих определителей.

4. Если элементы какой-либо строки (столбца) определителя представляют собой суммы двух слагаемых, то определитель может быть разложен на сумму соответствующих определителей.

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Вычисление определителя произвольного порядка

Вычисление определителя произвольного порядка

Определение
Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель $(n-1)$-го порядка, который получается из определителя n-го порядка вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}, т.е. строки с номером i и столбца с номером j.

Вычисление определителя произвольного порядка

Пример.

Если $\quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 7 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix},$

Вычисление определителя произвольного порядка

Пример.

Если $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 7 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, то

M_{32}

Вычисление определителя произвольного порядка

Пример.

Если $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 7 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, то

M_{32}

Вычисление определителя произвольного порядка

Пример.

Если $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 7 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, то

M_{32}

Вычисление определителя произвольного порядка

Пример.

Если $\quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 7 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, то

M_{32}

Вычисление определителя произвольного порядка

Пример.

Если $\quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 7 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, то

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix}$$

Вычисление определителя произвольного порядка

Пример.

Если $\quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 7 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, то

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot 7 - 0 \cdot (-2) = 7.$$

Вычисление определителя произвольного порядка

Определение

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется число, равное $(-1)^{i+j}M_{ij}$.

Вычисление определителя произвольного порядка

Пример.

Если $\quad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ -5 & -2 & 1 \end{vmatrix},$

Вычисление определителя произвольного порядка

Пример.

Если $\quad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ -5 & -2 & 1 \end{vmatrix}$, то

A_{32}

Вычисление определителя произвольного порядка

Пример.

Если $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ -5 & -2 & 1 \end{vmatrix}$, то

$$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32}$$

Вычисление определителя произвольного порядка

Пример.

Если $\quad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ -5 & -2 & 1 \end{vmatrix}$, то

$$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32}$$

Вычисление определителя произвольного порядка

Пример.

$$\text{Если}\quad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ -5 & -2 & 1 \end{vmatrix}, \text{ то}$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32}$$

Вычисление определителя произвольного порядка

Пример.

Если $\quad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ -5 & -2 & 1 \end{vmatrix}$, то

$$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32}$$

Вычисление определителя произвольного порядка

Пример.

Если $\quad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ -5 & -2 & 1 \end{vmatrix}$, то

$$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Вычисление определителя произвольного порядка

Пример.

Если $\quad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ -5 & -2 & 1 \end{vmatrix}$, то

$$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -(4-3) = -1.$$

Вычисление определителя произвольного порядка

Теорема (теорема разложения)

Вычисление определителя произвольного порядка

Теорема (теорема разложения)

Определитель квадратной матрицы порядка n равен сумме произведений элементов любого ряда (строки или столбца) на их алгебраические дополнения.

Вычисление определителя произвольного порядка

Пример. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Вычисление определителя произвольного порядка

Пример. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Вычислим определитель с помощью разложения по строке.

Вычисление определителя произвольного порядка

Для удобства вычисления выберем 2-ую строку, содержащую нулевой элемент ($a_{22} = 0$), поскольку при этом нет необходимости находить алгебраическое дополнение A_{22}, так как произведение $a_{22}A_{22} = 0$.

Вычисление определителя произвольного порядка

Итак,

Вычисление определителя произвольного порядка

Итак,

A_{21}

Вычисление определителя произвольного порядка

Итак,

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Вычисление определителя произвольного порядка

Итак,

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \cdot (-3 \cdot (-1) - 5 \cdot 1) = 2,$$

Вычисление определителя произвольного порядка

Итак,

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \cdot (-3 \cdot (-1) - 5 \cdot 1) = 2,$$

A_{23}

Вычисление определителя произвольного порядка

Итак,

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \\ = -1 \cdot (-3 \cdot (-1) - 5 \cdot 1) = 2,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Вычисление определителя произвольного порядка

Итак,

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \cdot (-3 \cdot (-1) - 5 \cdot 1) = 2,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \cdot (2 \cdot 1 - (-3) \cdot 2) = -8.$$

Вычисление определителя произвольного порядка

Тогда

$$\Delta = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} =$$
$$= 1 \cdot 2 + 0 + (-4) \cdot (-8) = 34.$$

Ответ: $\Delta = 34$.