Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Математика

Модуль 2. Пределы

Лекция 2.1

к.ф.-м.н. Семакин А.Н.

Логические символы

Логические символы

1. $\forall$ - любой, для любого

Логические символы

1. $\forall$ - любой, для любого

$\forall x > 0$

Логические символы

1. $\forall$ - любой, для любого

$\forall x > 0$ - любое положительное число x

Логические символы

1. $\forall$ - любой, для любого

$\forall x > 0$ - любое положительное число x

2. $\exists$ - существует

Логические символы

1. $\forall$ - любой, для любого

$\forall x > 0$ - любое положительное число x

2. $\exists$ - существует

$\exists x > 1$

Логические символы

1. $\forall$ - любой, для любого

$\forall x > 0$ - любое положительное число x

2. $\exists$ - существует

$\exists x > 1$ - существует число x, большее одного

Логические символы

1. $\forall$ - любой, для любого

$\forall x > 0$ - любое положительное число x

2. $\exists$ - существует

$\exists x > 1$ - существует число x, большее одного

3. $\Rightarrow$ - следует, следовательно, тогда, то

Логические символы

1. $\forall$ - любой, для любого

$\forall x > 0$ - любое положительное число x

2. $\exists$ - существует

$\exists x > 1$ - существует число x, большее одного

3. $\Rightarrow$ - следует, следовательно, тогда, то

$x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$

Логические символы

1. $\forall$ - любой, для любого

$\forall x > 0$ - любое положительное число x

2. $\exists$ - существует

$\exists x > 1$ - существует число x, большее одного

3. $\Rightarrow$ - следует, следовательно, тогда, то

$x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$

4. $\Leftrightarrow$ - равносильно, эквивалентно, тогда и только тогда

Логические символы

1. $\forall$ - любой, для любого

$\forall x > 0$ - любое положительное число x

2. $\exists$ - существует

$\exists x > 1$ - существует число x, большее одного

3. $\Rightarrow$ - следует, следовательно, тогда, то

$x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$

4. $\Leftrightarrow$ - равносильно, эквивалентно, тогда и только тогда

$x + 3 < 0 \Leftrightarrow x < -3$

Логические символы

5. $\in$ - принадлежит

Логические символы

5. $\in$ - принадлежит

$x \in A$

Логические символы

5. $\in$ - принадлежит

$x \in A$ - число x принадлежит множеству A

Логические символы

5. $\in$ - принадлежит

$x \in A$ - число x принадлежит множеству A

$1 \in \{1, 2, 3\}$

5. $\in$ - принадлежит

$x \in A$ - число x принадлежит множеству A

$1 \in \{1, 2, 3\}$

6. $\subset$ - включено

Логические символы

5. $\in$ - принадлежит

$x \in A$ - число x принадлежит множеству A

$1 \in \{1, 2, 3\}$

6. $\subset$ - включено

$A \subset B$

Логические символы

5. $\in$ - принадлежит

$x \in A$ - число x принадлежит множеству A

$1 \in \{1, 2, 3\}$

6. $\subset$ - включено

$A \subset B$ - множество A включено в множество B,

Логические символы

5. $\in$ - принадлежит

$x \in A$ - число x принадлежит множеству A

$1 \in \{1, 2, 3\}$

6. $\subset$ - включено

$A \subset B$ - множество A включено в множество B,т.е. все элементы множества A являются также и элементами множества B

Логические символы

5. $\in$ - принадлежит

$x \in A$ - число x принадлежит множеству A

$1 \in \{1, 2, 3\}$

6. $\subset$ - включено

$A \subset B$ - множество A включено в множество B,т.е. все элементы множества A являются также и элементами множества B

$\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$

Расширенное множество действительных чисел

Расширенное множество действительных чисел

Определение

Дополним множество действительных чисел R двумя элементами $+\infty$ и $-\infty$.

Расширенное множество действительных чисел

Определение

Дополним множество действительных чисел R двумя элементами $+\infty$ и $-\infty$.Полученное множество называется **расширенным множеством действительных чисел** и обозначается $\overline{R}$.

Расширенное множество действительных чисел

Определение

Дополним множество действительных чисел R двумя элементами $+\infty$ и $-\infty$.Полученное множество называется **расширенным множеством действительных чисел** и обозначается $\overline{R}$.

$a \in \overline{R} \rightarrow a$ - конечное число, $+\infty$ или $-\infty$.

Определение

Элементы $+\infty$ и $-\infty$ называются **бесконечными числами**.

Расширенное множество действительных чисел

Свойства бесконечных чисел

Расширенное множество действительных чисел

Свойства бесконечных чисел

1) $-\infty < +\infty$

Расширенное множество действительных чисел

Свойства бесконечных чисел

1) $-\infty < +\infty$

2) $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$

Свойства бесконечных чисел

1) $-\infty < +\infty$

2) $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$

3) $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$

Расширенное множество действительных чисел

Свойства бесконечных чисел

1) $-\infty < +\infty$

2) $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$

3) $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$

4) $(+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$

Свойства бесконечных чисел

1) $-\infty < +\infty$

2) $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$

3) $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$

4) $(+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$

5) $(+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$

Для конечного числа a справедливы свойства

Расширенное множество действительных чисел

Для конечного числа a справедливы свойства

1) $-\infty < a < +\infty$

Расширенное множество действительных чисел

Для конечного числа a справедливы свойства

1) $-\infty < a < +\infty$

2) $a + (+\infty) = +\infty$

Расширенное множество действительных чисел

Для конечного числа a справедливы свойства

1) $-\infty < a < +\infty$

2) $a + (+\infty) = +\infty$

3) $a + (-\infty) = -\infty$

Расширенное множество действительных чисел

Для конечного числа a справедливы свойства

1) $-\infty < a < +\infty$

2) $a + (+\infty) = +\infty$

3) $a + (-\infty) = -\infty$

4) если $a > 0$, то

$a \cdot (+\infty) = +\infty$, $a \cdot (-\infty) = -\infty$

Расширенное множество действительных чисел

Для конечного числа a справедливы свойства

1) $-\infty < a < +\infty$

2) $a + (+\infty) = +\infty$

3) $a + (-\infty) = -\infty$

4) если $a > 0$, то

$a \cdot (+\infty) = +\infty$, $a \cdot (-\infty) = -\infty$

5) если $a < 0$, то

$a \cdot (+\infty) = -\infty$, $a \cdot (-\infty) = +\infty$

Расширенное множество действительных чисел

Выражения

$$(+\infty)+(-\infty),\ (+\infty)-(+\infty),$$

Расширенное множество действительных чисел

Выражения

$$(+\infty) + (-\infty),\ (+\infty) - (+\infty),$$
$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ (\pm\infty) \cdot 0$$

Выражения

$$(+\infty)+(-\infty),\ (+\infty)-(+\infty),$$
$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ (\pm\infty)\cdot 0$$

неопределены и называются **неопределенностями**.

Выражения

$$(+\infty)+(-\infty),\ (+\infty)-(+\infty),$$
$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ (\pm\infty)\cdot 0$$

неопределены и называются **неопределенностями**.

Если знак бесконечного числа неизвестен, то это число называется **бесконечностью без знака** и обозначается ∞.

Числовая последовательность

Определение

Пусть каждому натуральному числу n поставлено в соответствие действительное число a_n. Совокупность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называется **числовой последовательностью**.

Числовая последовательность

Определение

Пусть каждому натуральному числу n поставлено в соответствие действительное число a_n. Совокупность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называется **числовой последовательностью**.

Обозначение: $\{a_n\}$

Определение

Пусть каждому натуральному числу n поставлено в соответствие действительное число a_n. Совокупность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называется **числовой последовательностью**.

Обозначение: $\{a_n\}$ - числовая последовательность с общим членом a_n.

Определение

Число a_n называется **n-ым членом последовательности** и задается формулой $a_n = f(n)$.

Определение

Число a_n называется **n-ым членом последовательности** и задается формулой $a_n = f(n)$.

Примеры: $a_n = 1/2^n$, $a_n = (-1)^n \cdot n^3$.

Определение

Конечное число a называется **пределом последовательности** $\{a_n\}$, если

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon |a_n - a| < \varepsilon.$$

Числовая последовательность

Определение

Конечное число a называется **пределом последовательности** $\{a_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon): |a_n - a| < \varepsilon.$$

Обозначение: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$.

Числовая последовательность

Определение

Конечное число a называется **пределом последовательности** $\{a_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon) \in N \ \forall n > n(\varepsilon) \colon |a_n - a| < \varepsilon.$$

Обозначение: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$.

Здесь a - конечное число, т.е. $a \neq \pm\infty$.

Поэтому определенный таким образом предел часто называют **конечным пределом**.

Числовая последовательность

Расшифровка математических символов:

Расшифровка математических символов:
$\forall \varepsilon > 0$ - для любого положительного ε

Числовая последовательность

Расшифровка математических символов:

$\forall\varepsilon > 0$ - для любого положительного ε

$\exists n(\varepsilon) \in N$ - существует натуральное число n, зависящее от ε, такое что

Расшифровка математических символов:

$\forall \varepsilon > 0$ - для любого положительного ε

$\exists n(\varepsilon) \in N$ - существует натуральное число n, зависящее от ε, такое что

$\forall n > n(\varepsilon)$ - для любого натурального числа n, превосходящего $n(\varepsilon)$

Числовая последовательность

Расшифровка математических символов:

$\forall \varepsilon > 0$ - для любого положительного ε

$\exists \boldsymbol{n}(\varepsilon) \in \boldsymbol{N}$ - существует натуральное число $\boldsymbol{n}$, зависящее от ε, такое что

$\forall \boldsymbol{n} > \boldsymbol{n}(\varepsilon)$ - для любого натурального числа $\boldsymbol{n}$, превосходящего $\boldsymbol{n}(\varepsilon)$

: - выполняется

Числовая последовательность

Расшифровка математических символов:

$\forall\varepsilon > 0$ - для любого положительного ε

$\exists n(\varepsilon) \in N$ - существует натуральное число n, зависящее от ε, такое что

$\forall n > n(\varepsilon)$ - для любого натурального числа n, превосходящего $n(\varepsilon)$

: - выполняется

$|a_n - a| < \varepsilon$ - модуль разности a_n и a меньше ε.

Числовая последовательность

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon |a_n - a| < \varepsilon.$$

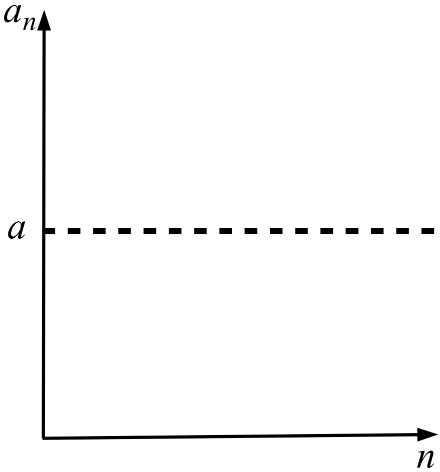
Числовая последовательность

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon |a_n - a| < \varepsilon.$$
$$n(\varepsilon) = 1,\ n(\varepsilon/2) = 2$$

Числовая последовательность

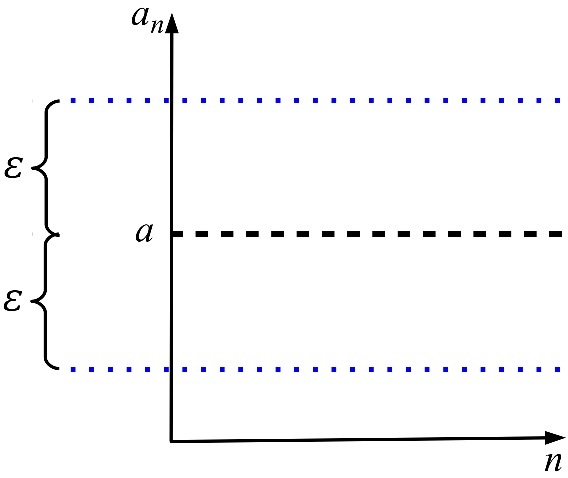
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon |a_n - a| < \varepsilon.$$

$$n(\varepsilon) = 1,\ n(\varepsilon/2) = 2$$



Числовая последовательность

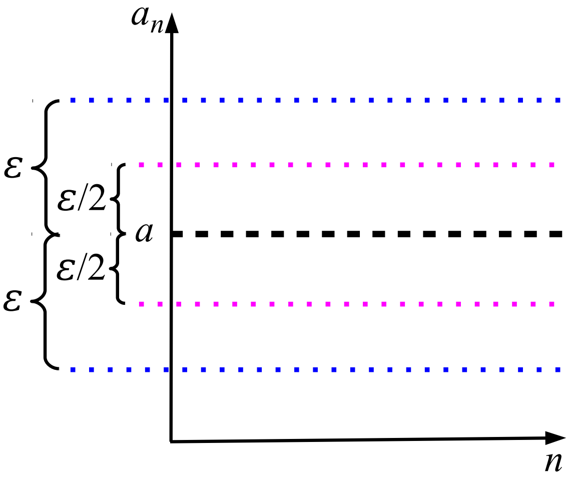
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon) \in N \ \forall n > n(\varepsilon) \colon |a_n - a| < \varepsilon.$$
$$n(\varepsilon) = 1, \ n(\varepsilon/2) = 2$$



Числовая последовательность

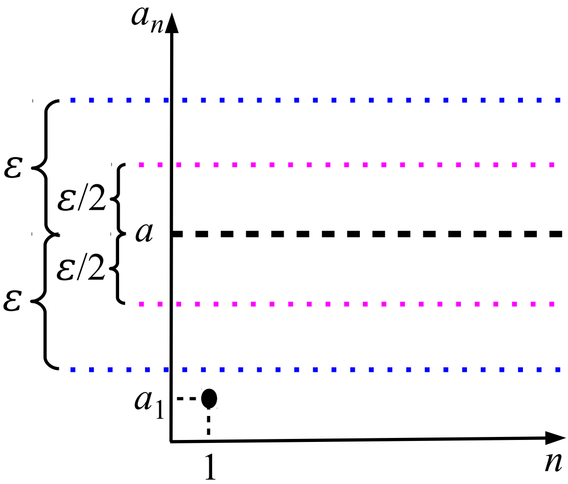
$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon |a_n - a| < \varepsilon.$$

$$n(\varepsilon) = 1,\ n(\varepsilon/2) = 2$$

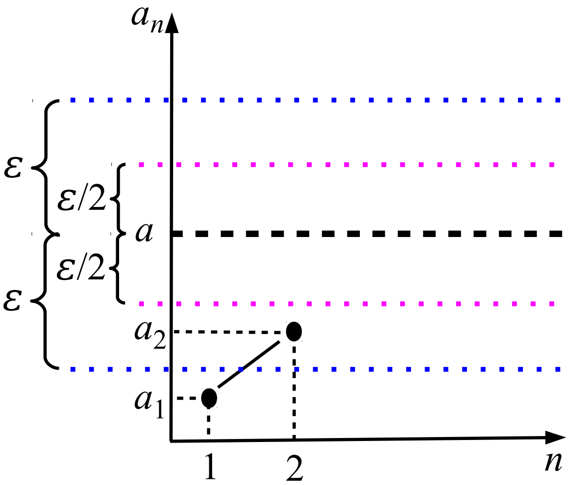


Числовая последовательность

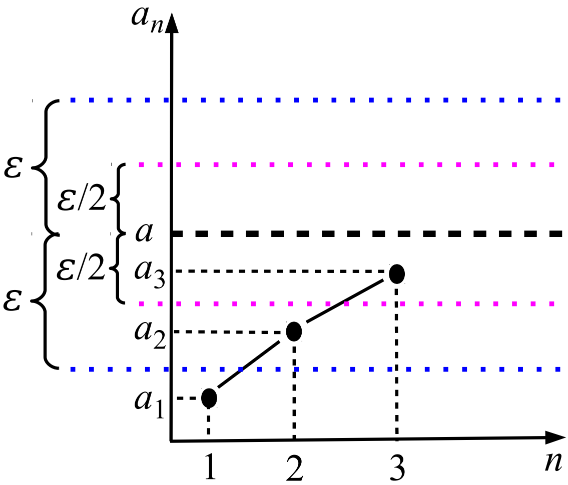
$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon |a_n - a| < \varepsilon.$$
$$n(\varepsilon) = 1,\ n(\varepsilon/2) = 2$$



$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon) \colon |a_n - a| < \varepsilon.$$
$$n(\varepsilon) = 1,\ n(\varepsilon/2) = 2$$

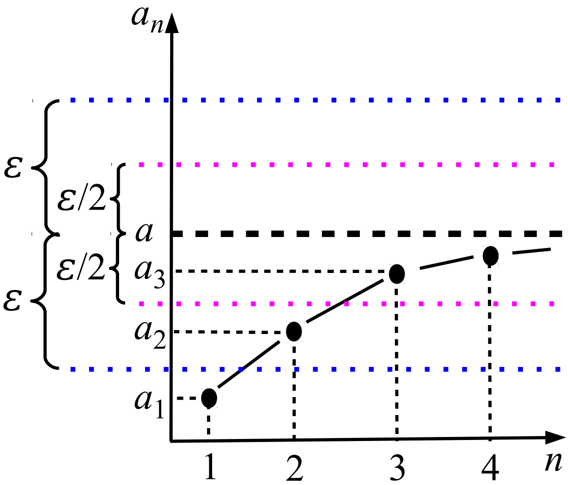


$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon) \in N \ \forall n > n(\varepsilon) \colon |a_n - a| < \varepsilon.$$
$$n(\varepsilon) = 1,\ n(\varepsilon/2) = 2$$

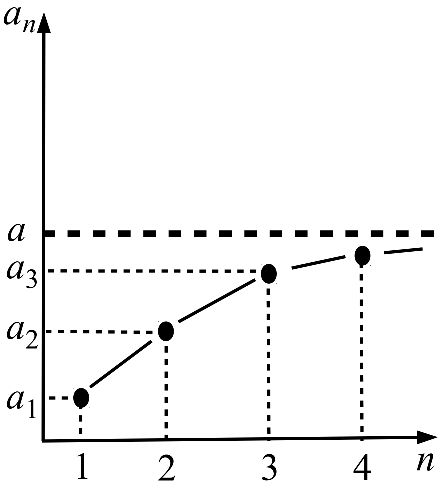


Числовая последовательность

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon) \in N \ \forall n > n(\varepsilon)\colon |a_n - a| < \varepsilon.$$
$$n(\varepsilon) = 1,\ n(\varepsilon/2) = 2$$



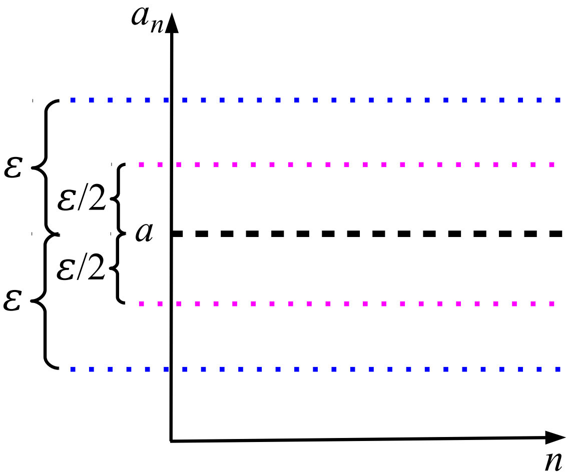
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon |a_n - a| < \varepsilon.$$
$$n(\varepsilon) = 1,\ n(\varepsilon/2) = 2$$



Числовая последовательность

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon |a_n - a| < \varepsilon.$$

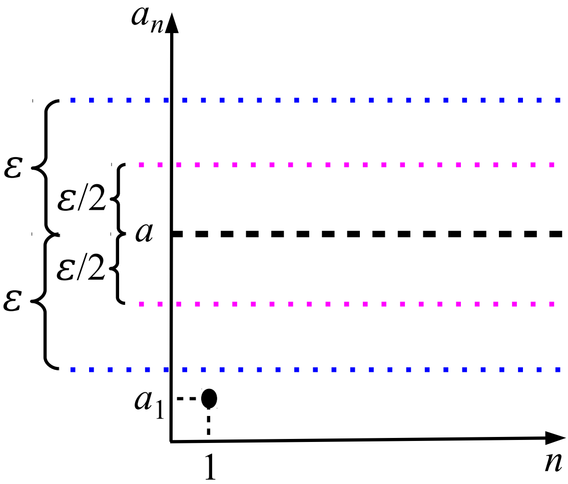
$$n(\varepsilon) = 1,\ n(\varepsilon/2) = 2$$



Числовая последовательность

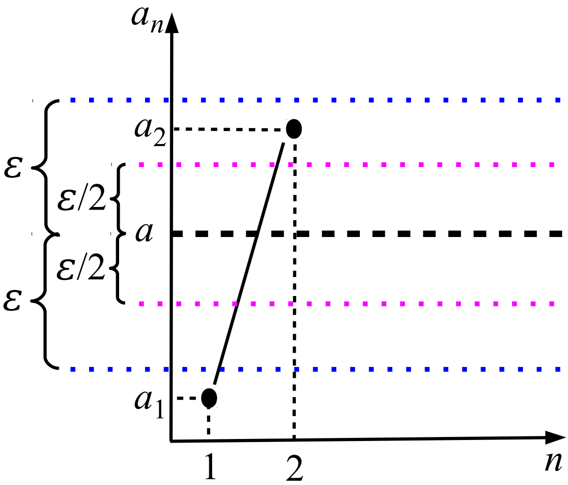
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon) \in N \ \forall n > n(\varepsilon) \colon |a_n - a| < \varepsilon.$$

$$n(\varepsilon) = 1, \ n(\varepsilon/2) = 2$$



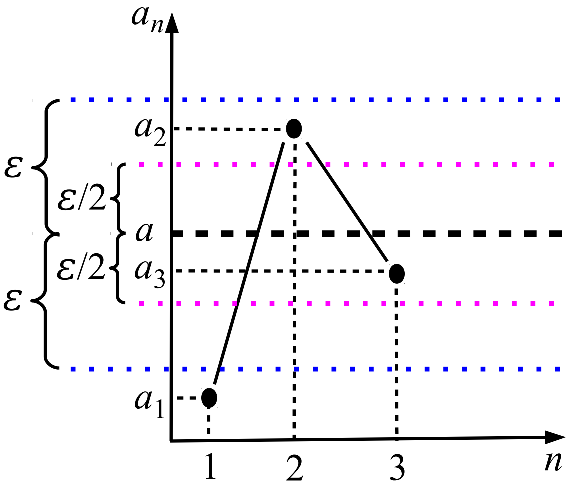
Числовая последовательность

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon |a_n - a| < \varepsilon.$$
$$n(\varepsilon) = 1,\ n(\varepsilon/2) = 2$$



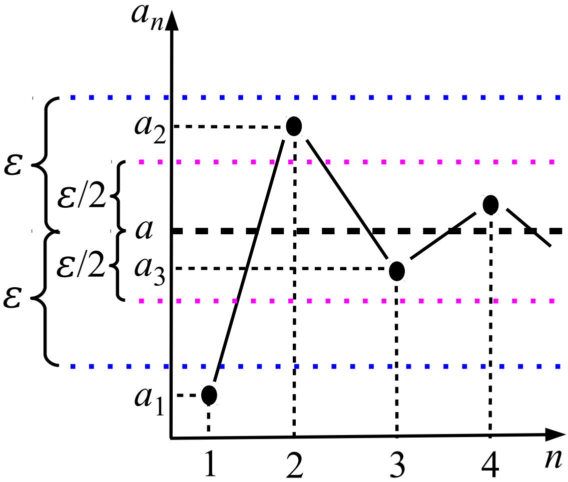
Числовая последовательность

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon |a_n - a| < \varepsilon.$$
$$n(\varepsilon) = 1,\ n(\varepsilon/2) = 2$$



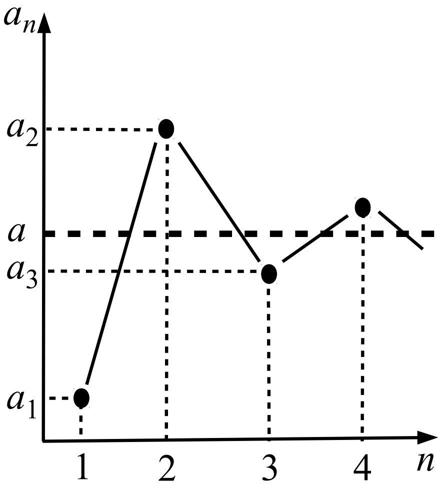
Числовая последовательность

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon |a_n - a| < \varepsilon.$$
$$n(\varepsilon) = 1,\ n(\varepsilon/2) = 2$$



Числовая последовательность

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon |a_n - a| < \varepsilon.$$
$$n(\varepsilon) = 1,\ n(\varepsilon/2) = 2$$



Числовая последовательность

Определение

Если последовательность имеет конечный предел, то она называется **сходящейся**. В противном случае она называется **расходящейся**.

Арифметические свойства конечных пределов

Арифметические свойства конечных пределов

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Тогда

Арифметические свойства конечных пределов

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Тогда

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$

Арифметические свойства конечных пределов

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Тогда

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = a - b$

Арифметические свойства конечных пределов

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Тогда

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = a - b$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$

Арифметические свойства конечных пределов

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Тогда

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = a - b$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n / y_n) = a/b$, если $b \neq 0$.

Условия сходимости последовательности

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной сверху (снизу)**, если

$$\exists b \in R\ \forall n \in N\colon x_n \leq b\ (x_n \geq b).$$

Условия сходимости последовательности

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **возрастающей (убывающей)**, если

$$\forall n \in N\colon\ x_n \le x_{n+1}\ (x_n \ge x_{n+1}).$$

Условия сходимости последовательности

Теорема (достаточное условие сходимости)

Теорема (достаточное условие сходимости)
Всякая возрастающая (или убывающая) и ограниченная сверху (или снизу) последовательность имеет конечный предел.

Условия сходимости последовательности

Пример:

Пример:

$$x_n = 1 - \frac{1}{n},$$

Условия сходимости последовательности

Пример:

$$x_n = 1 - \frac{1}{n},$$

$\forall n \quad x_n < 1$

(ограниченность),

Условия сходимости последовательности

Пример:

$x_n = 1 - \dfrac{1}{n}$,

$\forall n \quad x_n < 1$

(ограниченность),

$\forall n \quad x_n < x_{n+1}$

(возрастание),

Условия сходимости последовательности

Пример:

$$x_n = 1 - \frac{1}{n},$$

$$\forall n \;\; x_n < 1$$

(ограниченность),

$$\forall n \;\; x_n < x_{n+1}$$

(возрастание),

$$\Downarrow$$

$$\exists \lim_{n \to \infty} x_n$$

Условия сходимости последовательности

Пример:

$$x_n = 1 - \frac{1}{n},$$

$$\forall n \ \ x_n < 1$$

(ограниченность),

$$\forall n \ \ x_n < x_{n+1}$$

(возрастание),

$$\Downarrow$$

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n = 1.$$

Условия сходимости последовательности

Пример:

$x_n = 1 - \dfrac{1}{n}$,

$\forall n \;\; x_n < 1$

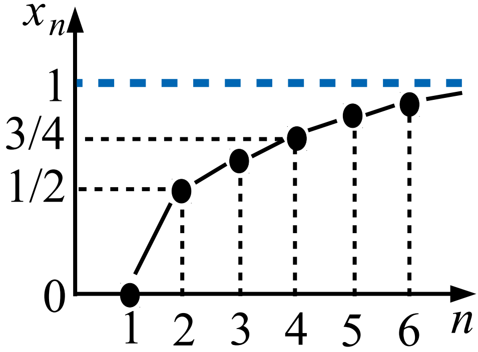
(ограниченность),

$\forall n \;\; x_n < x_{n+1}$

(возрастание),

$$\Downarrow$$

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n = 1.$$



Бесконечно большая и малая последовательности

Бесконечно большая и малая последовательности

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно большой**, если $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) \in N \; \forall n > n(\varepsilon)$: $|x_n| > \varepsilon$.

Бесконечно большая и малая последовательности

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно большой**, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)$: $|x_n| > \varepsilon$.

В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$

Бесконечно большая и малая последовательности

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно большой**, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon |x_n| > \varepsilon$.

В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ и говорят, что последовательность $\{x_n\}$ имеет **бесконечный предел**.

Бесконечно большая и малая последовательности

Частные случаи

Бесконечно большая и малая последовательности

Частные случаи

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, если

Бесконечно большая и малая последовательности

Частные случаи

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, если

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon x_n > \varepsilon$

Бесконечно большая и малая последовательности

Частные случаи

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, если

$\forall\varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon x_n > \varepsilon$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, если

Бесконечно большая и малая последовательности

Частные случаи

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, если

$\forall\varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)$: $x_n > \varepsilon$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, если

$\forall\varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)$: $x_n < -\varepsilon$

Бесконечно большая и малая последовательности

Примеры:

Бесконечно большая и малая последовательности

Примеры: Частные случаи

Бесконечно большая и малая последовательности

Примеры: Частные случаи

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$$

Бесконечно большая и малая последовательности

Примеры: Частные случаи

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$$

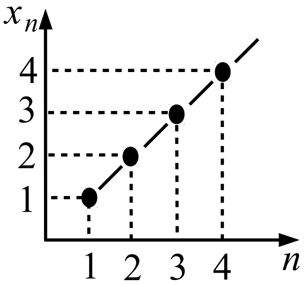
$$x_n = n$$

Бесконечно большая и малая последовательности

Примеры: Частные случаи

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$$

$$x_n = n$$



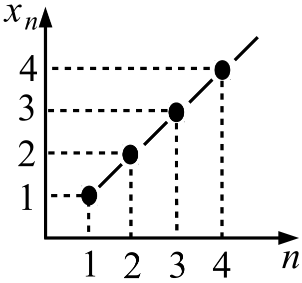
Бесконечно большая и малая последовательности

Примеры: Частные случаи

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$$

$$x_n = n$$

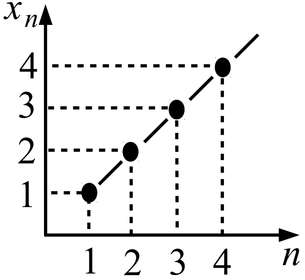


Примеры:

Частные случаи

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$$

$$x_n = n$$



$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$$

$$x_n = -n$$

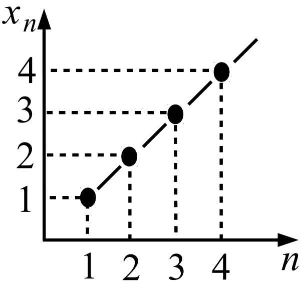
Бесконечно большая и малая последовательности

Примеры:

Частные случаи

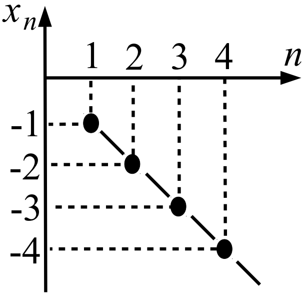
$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$$

$$x_n = n$$



$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$$

$$x_n = -n$$



Бесконечно большая и малая последовательности

Примеры:

Общий случай

Бесконечно большая и малая последовательности

Примеры:

Общий случай

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

Бесконечно большая и малая последовательности

Примеры: Общий случай

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

$$x_n = (-1)^{n+1} \cdot n$$

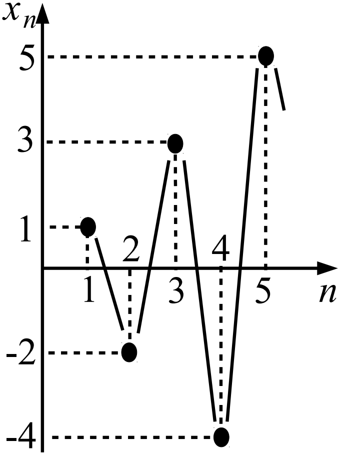
Бесконечно большая и малая последовательности

Примеры:

Общий случай

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

$$x_n = (-1)^{n+1} \cdot n$$



Бесконечно большая и малая последовательности

Знак перед ∞ несет дополнительную информацию о поведении последовательности.

Бесконечно большая и малая последовательности

Знак перед ∞ несет дополнительную информацию о поведении последовательности. Мы ставим знак "$+$", если последовательность движется вверх в сторону положительной бесконечности,

Бесконечно большая и малая последовательности

Знак перед ∞ несет дополнительную информацию о поведении последовательности. Мы ставим знак "$+$", если последовательность движется вверх в сторону положительной бесконечности, и знак "$-$", если она идет вниз в сторону отрицательной бесконечности.

Бесконечно большая и малая последовательности

Знак перед ∞ несет дополнительную информацию о поведении последовательности. Мы ставим знак "$+$", если последовательность движется вверх в сторону положительной бесконечности, и знак "$-$", если она идет вниз в сторону отрицательной бесконечности. Если направление движения однозначно определить нельзя, то знак перед ∞ не ставится.

Бесконечно большая и малая последовательности

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно малой**, если $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) \in N \; \forall n > n(\varepsilon)\colon |x_n| < \varepsilon.$

Бесконечно большая и малая последовательности

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно малой**, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon |x_n| < \varepsilon$.

В этом случае пишут $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$.

Бесконечно большая и малая последовательности

Связь между бесконечно малой и бесконечно большой последовательностями определяется двумя утверждениями:

Бесконечно большая и малая последовательности

Связь между бесконечно малой и бесконечно большой последовательностями определяется двумя утверждениями:
1. Если $\{x_n\}$ - бесконечно большая, то $\{1/x_n\}$ - бесконечно малая.

Бесконечно большая и малая последовательности

Связь между бесконечно малой и бесконечно большой последовательностями определяется двумя утверждениями:

1. Если $\{x_n\}$ - бесконечно большая, то $\{1/x_n\}$ - бесконечно малая.
2. Если $\{x_n\}$ - бесконечно малая и $\forall n$: $x_n \neq 0$, то $\{1/x_n\}$ - бесконечно большая.

Бесконечно большая и малая последовательности

Символически эти утверждения можно записать в виде:

$$\frac{1}{\infty} = 0, \qquad \frac{1}{0} = \infty.$$

Число e

Число e определяется следующим образом:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Число e

Число e определяется следующим образом:

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

Число e является основанием экспоненциальной функции $y = e^x$ и натурального логарифма $y = \ln x = \log_e x$.

Число e

Число e определяется следующим образом:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Число e является основанием экспоненциальной функции $y = e^x$ и натурального логарифма $y = \ln x = \log_e x$. В приближенных вычислениях обычно полагают $e \approx 2.72$.

Число e

Число e является основанием экспоненциальной функции $y = e^x$

Число e

Число e является основанием экспоненциальной функции $y = e^x$ и натурального логарифма $y = \ln x = \log_e x$.