Математика
Модуль 1. Векторы. Матрицы. СЛАУ
Лекция 1.3

Аннотация

Линейная зависимость строк матрицы. Ранг матрицы. Метод элементарных преобразований для определения ранга матрицы. Определители. Правила вычисления определителей 1-ого, 2-ого и 3-его порядков. Свойства определителей. Вычисление определителя произвольного порядка.

1 Ранг матрицы

Любую строку произвольной матрицы A можно рассматривать как матрицу из одной строки. Например, матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

состоит из двух строк

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix},$$
$$P_2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix},$$

рассматриваемых как отдельные однострочные матрицы. Следовательно, к ним применимы определенные ранее правила сложения матриц и умножения матрицы на число:

$$P_1 + P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{+}3 & 2{+}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \end{pmatrix},$$
$$2 \cdot P_1 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{\cdot}1 & 2{\cdot}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Определение

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ - действительные числа, $P_1, P_2, ..., P_n$, - строки матрицы A. Выражение $\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + ... + \alpha_n P_n$ называется **линейной комбинацией строк** $P_1, P_2, ..., P_n$ с коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$.

Определение

Линейная комбинация строк матрицы называется **тривиальной**, если все ее коэффициенты равны нулю, и **нетривиальной**, если хотя бы один из коэффициентов отличен от нуля.

Определение

Строки $P_1, P_2, ..., P_n$ матрицы A называются **линейно зависимыми**, если существует нетривиальная линейная комбинация этих строк, равная нулевой строке.

Определение

Строки $P_1, P_2, ..., P_n$ матрицы A называются **линейно независимыми**, если только их тривиальная линейная комбинация равна нулевой строке.

Определение

Рангом матрицы A называется максимальное число ее линейно независимых строк.

Обозначение: $rangA$, $r(A)$, r.

Примеры:

1. Матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

состоит из двух линейно зависимых строк

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } P_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix},$$

т.к. для них можно составить нетривиальную линейную комбинацию, равную нулевой строке:

$$2 \cdot P_1 - P_2 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 2{\cdot}1{-}2 & 2{\cdot}2{-}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Соответственно, $rangA = 1$.

2. Матрица
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
состоит из трех строк
$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \; P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
Строки P_2 и P_3 линейно зависимы, т.к.
$$2 \cdot P_2 - P_3 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 2{\cdot}0{-}0 & 2{\cdot}1{-}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix},$$
а строки P_1 и P_2 линейно независимы, т.к. только их тривиальная линейная комбинация равна нулевой строке:
$$0 \cdot P_1 + 0 \cdot P_2 = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 0{\cdot}1{+}0{\cdot}0 & 0{\cdot}0{+}0{\cdot}1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
В то же время все три строки P_1, P_2 и P_3 будут линейно зависимы, т.к. для них можно составить нетривиальную линейную комбинацию, равную нулевой строке:
$$0 \cdot P_1 + 2 \cdot P_2 - P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Соответственно, $rang B = 2$.

Наиболее распространенным методом определения ранга произвольной матрицы является **метод элементарных преобразований**, опирающийся на следующие две теоремы.

Теорема (о ранге матрицы при элементарных преобразованиях)
Ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях.

Теорема (о ранге ступенчатой матрицы)
Ранг ступенчатой матрицы равен количеству ненулевых строк.

Метод элементарных преобразований для определения ранга произвольной матрицы:

1. С помощью элементарных преобразований приводим данную матрицу к ступенчатому виду.

2. Определяем ранг исходной матрицы как количество ненулевых строк в получившейся ступенчатой матрице.

2 Определитель матрицы

Определитель является характеристикой исключительно квадратных матриц.

Определение

Определителем квадратной матрицы называется число, вычисляемое по заданному правилу из элементов данной матрицы.

Если $A = (a_{ij})$ - это квадратная матрица порядка n, то ее определитель называется определителем n-го порядка и записывается в виде:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Употребляются также следующие обозначения: $\det A$, ΔA, $|A|$.

Приведем правила вычисления определителей порядков 1, 2 и 3:

1. $n = 1$

$A = (a_{11})$ - матрица, состоящяя только из одного элемента a_{11}. Тогда $\det A = a_{11}$.

Пример:

$A = (3), \det A = 3.$

2. $n = 2$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

Определитель 2-ого порядка вычисляется как произведение элементов главной диагонали минус произведение элементов побочной диагонали.

Пример:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 3 \cdot 2 = -1$.

3. $n = 3$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - \\ - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}.$$

Данная формула называется **правилом треугольников**. Название формулы обусловлено ее геометрической интерпретацией.

Элементы, произведения которых входят в определитель со знаком «+», располагаются так:

$$+\begin{vmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \mathbf{a_{33}} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \mathbf{a_{12}} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \mathbf{a_{23}} \\ \mathbf{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \mathbf{a_{13}} \\ \mathbf{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \mathbf{a_{32}} & a_{33} \end{vmatrix},$$

образуя отрезок, совпадающий с главной диагональю, и два треугольника, симметричных относительно главной диагонали.

Элементы, произведения которых входят в определитель со знаком «-», располагаются аналогичным образом относительно побочной диагонали:

$$-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \mathbf{a_{13}} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & a_{23} \\ \mathbf{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & \mathbf{a_{12}} & a_{13} \\ \mathbf{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \mathbf{a_{33}} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \mathbf{a_{23}} \\ a_{31} & \mathbf{a_{32}} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Пример:

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 5\cdot 1\cdot 3 + 2\cdot 4\cdot 6 + 3\cdot 0\cdot 1 -$$
$$-6\cdot 1\cdot 1 - 3\cdot 2\cdot 3 - 5\cdot 0\cdot 4 = 39.$$

3 Свойства определителей

1. Определитель не изменится, если к элементам какой-либо строки (столбца) прибавить соответствующие элементы параллельной строки (столбца), умноженные на любое число.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+\alpha\cdot a_{21} & a_{12}+\alpha\cdot a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

2. При перестановке местами двух параллельных строк (столбцов) знак определителя меняется на противоположный.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}$$

3. Общий множитель элементов какой-либо строки (столбца) определителя можно вынести за знак определителя.

$$\begin{vmatrix} \alpha\cdot a_{11} & \alpha\cdot a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \alpha\cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

4. Если элементы какой-либо строки (столбца) определителя представляют собой суммы двух слагаемых, то определитель может быть разложен на сумму соответствующих определителей.

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

4 Вычисление определителя произвольного порядка

Определение

Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель $(n-1)$-го порядка, который получается из определителя n-го порядка вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}, т.е. строки с номером i и столбца с номером j.

Пример.

Если $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 7 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, то $M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot 7 - 0 \cdot (-2) = 7.$

Определение

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется число, равное $(-1)^{i+j} M_{ij}$.

Пример.

Если $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ -5 & -2 & 1 \end{vmatrix}$, то

$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(4-3) = -1.$

Теорема (теорема разложения)

Определитель квадратной матрицы порядка n равен сумме произведений элементов любого ряда (строки или столбца) на их алгебраические дополнения.

Пример. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Вычислим определитель с помощью разложения по строке. Для удобства вычисления выберем 2-ую строку, содержащую нулевой элемент ($a_{22} = 0$), поскольку при этом нет необходимости находить алгебраическое дополнение A_{22}, так как произведение $a_{22}A_{22} = 0$. Итак,

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-3 \cdot (-1) - 5 \cdot 1) = 2,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (2 \cdot 1 - (-3) \cdot 2) = -8.$$

Тогда $\Delta = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = 1 \cdot 2 + 0 + (-4) \cdot (-8) = 34.$

Ответ: $\Delta = 34$.