Математика
Модуль 2. Пределы
Лекция 2.1

Аннотация

Логические символы. Расширенное множество действительных чисел. Числовая последовательность и ее предел. Арифметические свойства конечных пределов. Достаточное условие сходимости. Бесконечно большая последовательность. Бесконечно малая последовательность. Число e.

1 Логические символы

1. $\forall$ - любой, для любого

   $\forall x > 0$ - любое положительное число x

2. $\exists$ - существует

   $\exists x > 1$ - существует число x, большее одного

3. $\Rightarrow$ - следует, следовательно, тогда, то

   $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$

4. $\Leftrightarrow$ - равносильно, эквивалентно, тогда и только тогда

   $x + 3 < 0 \Leftrightarrow x < -3$

5. $\in$ - принадлежит

   $x \in A$ - число x принадлежит множеству A

   $1 \in \{1, 2, 3\}$

6. $\subset$ - включено

   $A \subset B$ - множество A включено в множество B, т.е. все элементы множества A являются также и элементами множества B

   $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$

2 Расширенное множество действительных чисел

Определение

Дополним множество действительных чисел R двумя элементами $+\infty$ и $-\infty$. Полученное множество называется **расширенным множеством действительных чисел** и обозначается $\overline{R}$.

$a \in \overline{R} \to a$ - конечное число, $+\infty$ или $-\infty$.

Определение

Элементы $+\infty$ и $-\infty$ называются **бесконечными числами**.

Свойства бесконечных чисел

1) $-\infty < +\infty$
2) $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
3) $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
4) $(+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$
5) $(+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$

Для любого конечного числа a справедливы свойства

1) $-\infty < a < +\infty$
2) $a + (+\infty) = +\infty$
3) $a + (-\infty) = -\infty$
4) если $a > 0$, то $a \cdot (+\infty) = +\infty$, $a \cdot (-\infty) = -\infty$
5) если $a < 0$, то $a \cdot (+\infty) = -\infty$, $a \cdot (-\infty) = +\infty$

Выражения $(+\infty) + (-\infty)$, $(+\infty) - (+\infty)$, $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $(\pm\infty) \cdot 0$ неопределены и называются **неопределенностями**.
Если знак бесконечного числа неизвестен, то это число называется **бесконечностью без знака** и обозначается ∞.

3 Числовая последовательность

Определение

Пусть каждому натуральному числу n поставлено в соответствие действительное число a_n. Совокупность чисел $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ называется **числовой последовательностью**.

Обозначение: $\{a_n\}$ - числовая последовательность с общим членом a_n.

Определение

Число a_n называется **n-ым членом последовательности** и задается формулой $a_n = f(n)$.

Примеры: $a_n = 1/2^n$, $a_n = (-1)^n \cdot n^3$.

Определение

Конечное число a называется **пределом последовательности** $\{a_n\}$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)$: $|a_n - a| < \varepsilon$.

Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Здесь a - конечное число, т.е. $a \neq \pm\infty$. Поэтому определенный таким образом предел часто называют **конечным пределом**.

Расшифровка математических символов в определении предела:

$\forall \varepsilon > 0$ - для любого положительного ε

$\exists n(\varepsilon) \in N$ - существует натуральное число n, зависящее от ε, такое что

$\forall n > n(\varepsilon)$ - для любого натурального числа n, превосходящего $n(\varepsilon)$

: - выполняется

$|a_n - a| < \varepsilon$ - модуль разности a_n и a меньше ε.

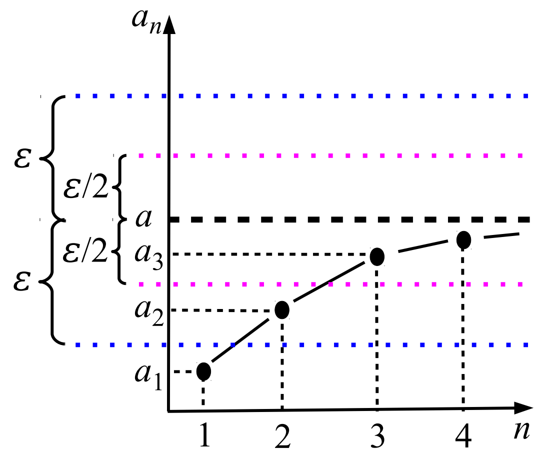
Определение

Если последовательность имеет конечный предел, то она называется **сходящейся**. В противном случае она называется **расходящейся**.

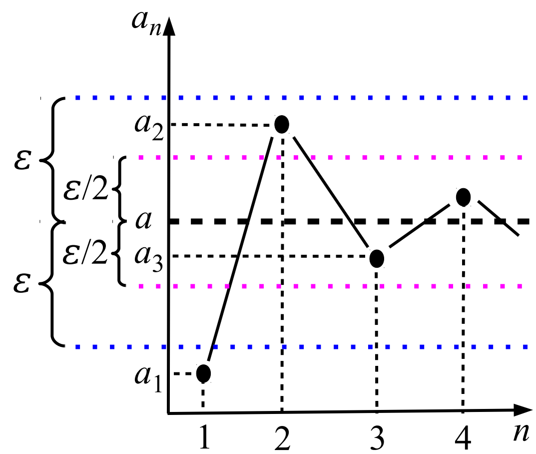
Геометрическая интерпретация сходящейся последовательности:

Пусть в определении предела $n(\varepsilon) = 1$, $n(\varepsilon/2) = 2$. Приведем два возможных варианта поведения сходящейся числовой последовательности в окрестности числа a:

1) вариант 1



2) вариант 2



Арифметические свойства конечных пределов

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Тогда

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$
2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = a - b$
3) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$
4) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n / y_n) = a/b$, если $b \neq 0$.

4 Условия сходимости последовательности

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной сверху (снизу)**, если

$$\exists b \in R\ \forall n \in N\colon x_n \le b\ (x_n \ge b).$$

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **возрастающей (убывающей)**, если

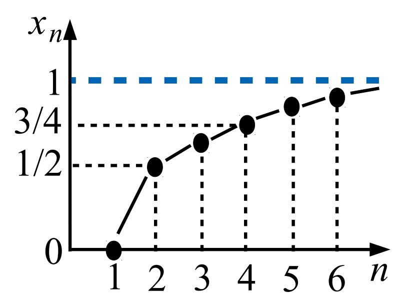
$$\forall n \in N\colon x_n \le x_{n+1}\ (x_n \ge x_{n+1}).$$

Теорема (достаточное условие сходимости)

Всякая возрастающая (или убывающая) и ограниченная сверху (или снизу) последовательность имеет конечный предел.

Пример:

$x_n = 1 - \dfrac{1}{n}$,
$\forall n\ x_n < 1$ (ограниченность),
$\forall n\ x_n < x_{n+1}$ (возрастание),
$\Downarrow$
$\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.



5 Бесконечно большая и малая последовательности

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно большой**, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon) \in N \ \forall n > n(\varepsilon)$: $|x_n| > \varepsilon$.

В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ и говорят, что последовательность $\{x_n\}$ имеет **бесконечный предел**.

Частные случаи

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon) \in N \ \forall n > n(\varepsilon)$: $x_n > \varepsilon$
2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon) \in N \ \forall n > n(\varepsilon)$: $x_n < -\varepsilon$

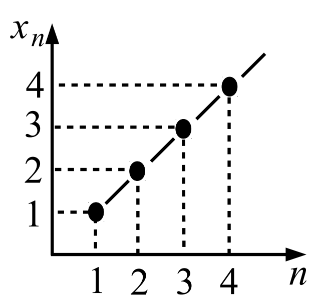
Знак перед ∞ несет дополнительную информацию о поведении последовательности. Мы ставим знак “+”, если последовательность движется вверх в сторону положительной бесконечности, и знак “−”, если она идет вниз в сторону отрицательной бесконечности. Если направление движения однозначно определить нельзя, то знак перед ∞ не ставится.

Примеры:

Частные случаи

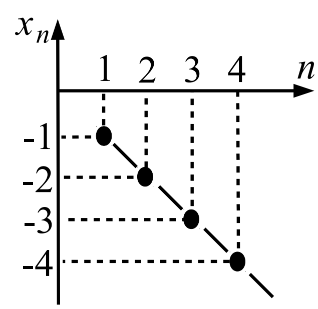
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$

$x_n = n$



$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$

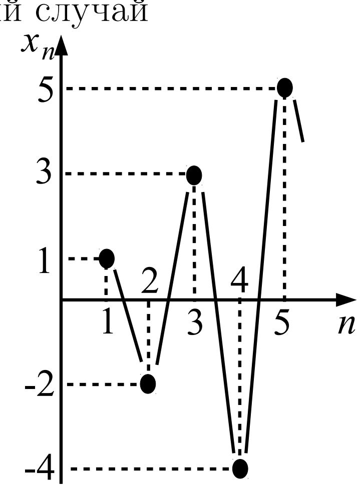
$x_n = -n$



Общий случай

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

$$x_n = (-1)^{n+1} \cdot n$$



Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно малой**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon) \in N \ \forall n > n(\varepsilon)\colon |x_n| < \varepsilon.$$

В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Связь между бесконечно малой и бесконечно большой последовательностями определяется двумя утверждениями:

1. Если $\{x_n\}$ - бесконечно большая, то $\{1/x_n\}$ - бесконечно малая.
2. Если $\{x_n\}$ - бесконечно малая и $\forall n$: $x_n \neq 0$, то $\{1/x_n\}$ - бесконечно большая.

Символически эти утверждения можно записать в виде:

$$\frac{1}{\infty} = 0, \qquad \frac{1}{0} = \infty.$$

6 Число e

Число e определяется следующим образом:

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Число e является основанием экспоненциальной функции $y = e^x$ и натурального логарифма $y = \ln x = \log_e x$. В приближенных вычислениях обычно полагают $e \approx 2.72$.