Математика

Модуль 2. Пределы

Лекция 2.2

Аннотация

Окрестность точки. Типы стремления переменной к точке. Предел функции в терминах последовательностей. Арифметические свойства пределов. Односторонние пределы. Первый замечательный предел и его следствия. Второй замечательный предел и его следствия.

1 Окрестность точки

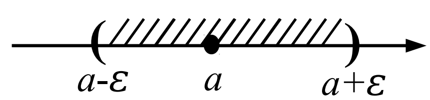
Под точкой понимается как действительное число, так и элементы $+\infty$, $-\infty$, ∞.

Определение

ε**-окрестность** точки a обозначается как $U(a, \varepsilon)$ и определяется по формулам:

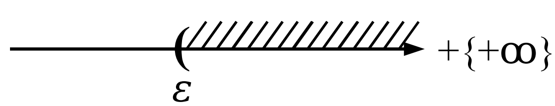
1) a - действительное число

$U(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$

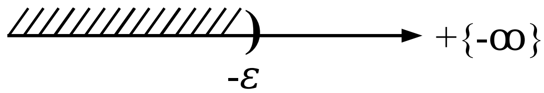


2) $a = +\infty$

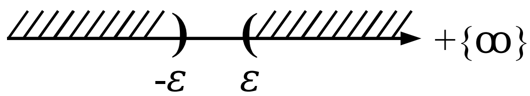
$U(+\infty, \varepsilon) = (\varepsilon, +\infty]$



3) $a = -\infty$
$U(-\infty, \varepsilon) = [-\infty, -\varepsilon)$



4) $a = \infty$
$U(\infty, \varepsilon) = (-\infty, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, +\infty) \cup \{\infty\}$

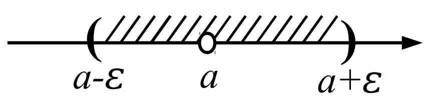


ε-окрестность часто называют **окрестностью** и обозначают $U(a)$, опуская символ ε. В этом случае ε просто подразумевается. Обозначения $U(a, \varepsilon)$ и $U(a)$ эквивалентны.

Определение

Проколотой окрестностью точки a называется окрестность без самой точки a, т.е.

$$\overset{\circ}{U}(a, \varepsilon) = U(a, \varepsilon) \backslash a.$$



Помимо двусторонней окрестности $U(a, \varepsilon)$ для действительных чисел можно ввести односторонние окрестности:

1) правосторонняя окрестность

$U_{+}(a, \varepsilon) = [a, a + \varepsilon), \overset{\circ}{U}_{+}(a, \varepsilon) = (a, a + \varepsilon)$

2) левосторонняя окрестность

$U_{-}(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a], \overset{\circ}{U}_{-}(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a)$

2 Типы стремления переменной к точке

Рассмотрим произвольную переменную x, которая принимает последовательно значения $x_1, x_2, ..., x_n, ...$. В зависимости от вида последовательности $\{x_n\}$ можно выделить несколько типов стремления переменной x к точке a.

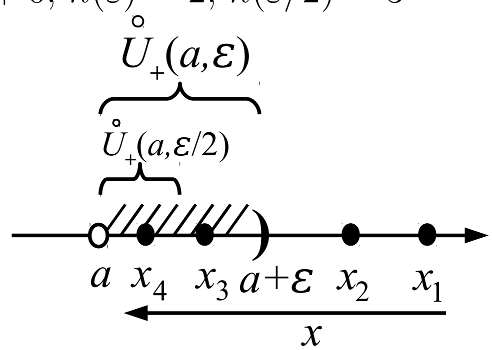
1. Одностороннее стремление

Говорят, что x **стремится** к a **справа**, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon x_n \in \overset{\circ}{U}_+ (a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \to a + 0$.

Пример: $x \to a + 0$, $n(\varepsilon) = 2$, $n(\varepsilon/2) = 3$

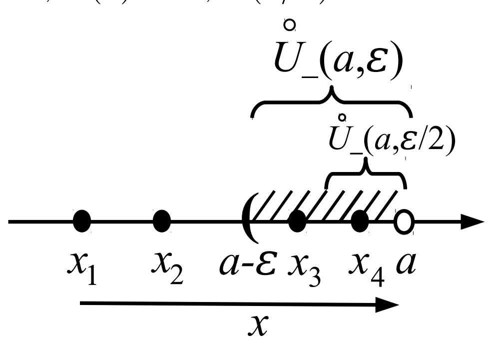


Говорят, что x **стремится** к a **слева**, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon x_n \in \overset{\circ}{U}_- (a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \to a - 0$.

Пример: $x \to a - 0$, $n(\varepsilon) = 2$, $n(\varepsilon/2) = 3$



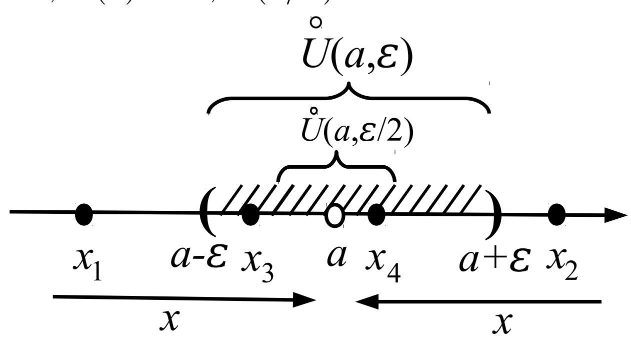
2. Двустороннее стремление

Говорят, что x **стремится** к a, если

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon) \in N \ \forall n > n(\varepsilon)\colon x_n \in \mathring{U}(a,\varepsilon).$$

Обозначение: $x \to a$.

Пример: $x \to a$, $n(\varepsilon) = 2$, $n(\varepsilon/2) = 3$



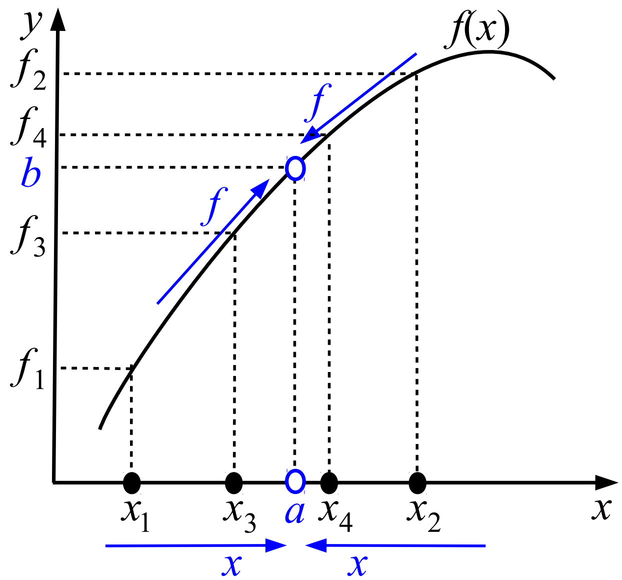
3 Предел функции

Пусть дана некоторая функция $y = f(x)$ и пусть $x \to a$, т.е. x последовательно принимает значения x_1, x_2, ..., x_n, ..., которые с ростом n приближаются к точке a. Этой последовательности соответствует последовательность значений функции $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_n)$, ..., которая, в свою очередь, с ростом n приближается к некоторой точке b.

Определение (в терминах последовательностей)

Точка b называется **пределом** функции $f(x)$ при $x \to a$, если для любой последовательности $\{x_n\}$ значений переменной x такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к точке b, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$.

Обозначение: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.



В данном определении точки a и b могут быть конечными числами или бесконечностями. Если a - конечное число, то предел также часто называют **двусторонним пределом**.

Арифметические свойства пределов

Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$, причем b и c - конечные числа, то

1) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = b \pm c$
2) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = b \cdot c$
3) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)/g(x)) = b/c$, если $c \neq 0$

Определение (в терминах последовательностей)

Точка b называется **пределом** функции $f(x)$ **слева** при $x \to a$, если для любой последовательности $\{x_n\}$ значений переменной x такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\forall n\ x_n < a$ $(x \to a-0)$, последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к точке b.

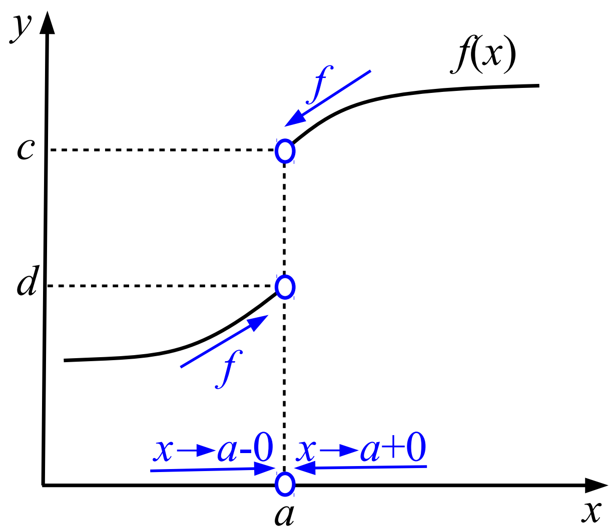
Обозначение: $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = b$.

Определение (в терминах последовательностей)

Точка b называется **пределом** функции $f(x)$ **справа** при $x \to a$, если для любой последовательности $\{x_n\}$ значений переменной x такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\forall n\ x_n > a$ $(x \to a+0)$, последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к точке b.

Обозначение: $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = b$.

Геометрическая интерпретация:



На рисунке $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = c$, $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = d$.

4 Замечательные пределы

Первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} = 1$$

Здесь u - произвольная функция, которая обладает свойством: $u \to 0$.

Примеры:

1) $u = 5x \to 0$ при $x \to 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{5x} = 1$,

2) $u = 2x - 2 \to -2$ при $x \to 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x-2)}{2x-2} \neq 1$.

Следствия:

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1 \qquad \lim_{u\to 0}\frac{\operatorname{tg} u}{u} = 1$$

$$2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = 1 \qquad \lim_{u\to 0}\frac{\arcsin u}{u} = 1$$

$$3)\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1 \qquad \lim_{u\to 0}\frac{\operatorname{arctg} u}{u} = 1$$

Второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e \qquad \lim_{u\to 0}(1+u)^{1/u} = e$$

Здесь u - произвольная функция, которая обладает свойством: $u \to 0$.

Примеры:

1) $u = 3x \to 0$ при $x \to 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{1/3x} = e$,

2) $u = 4x - 1 \to -1$ при $x \to 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}(1+(4x-1))^{1/(4x-1)} \neq e$.

Следствия:

$$1)\ \lim_{x\to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e \qquad \lim_{u\to \infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u} = e$$

$$2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \qquad \lim_{u\to 0}\frac{\ln(1+u)}{u} = 1$$

$$3)\ \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a \qquad \lim_{u\to 0}\frac{a^u-1}{u}=\ln a$$

$$4)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1 \qquad \lim_{u\to 0}\frac{e^u-1}{u}=1$$