Математика
Модуль 1. Векторы. Матрицы. СЛАУ
Лекция 1.2

Аннотация

Матрицы. Виды матриц. Линейные операции над матрицами (сложение и умножение на число) и их свойства. Нелинейные операции над матрицами (произведение и транспонирование) и их свойства. Элементарные преобразования матриц. Ступенчатая матрица. Приведение произвольной матрицы к ступенчатому виду.

1 Матрицы

Определение

Числовой матрицей размера $m \times n$ называется совокупность чисел, расположенных в виде таблицы, в которой имеется m строк и n столбцов. Составляющие матрицу числа называются ее **элементами**.

Матрицы обозначаются заглавными латинскими буквами A, B, C, ... и записываются в виде:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Здесь a_{ij} - элемент матрицы, находящийся в строке под номером i и в столбце под номером j. Иногда в обозначении матрицы указывается ее размерность: $A_{m\times n}$, где m - число строк, а n - число столбцов. Часто используется сокращенная запись матрицы: $A = (a_{ij})$.

Пример. $A_{2\times 4} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$ - матрица A имеет размер 2×4, т.к. она содержит 2 строчки и 4 столбца, ее элемент $a_{23} = 7$ расположен во второй строке и третьем столбце.

2 Виды матриц

Определение

Если в матрице число строк равно числу столбцов, то матрица называется **квадратной**, в противном случае - **прямоугольной**.

Определение

Квадратная матрица размера $n \times n$ называется **матрицей n-ого порядка**.

Определение

В квадратной матрице элементы $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ образуют **главную диагональ**, а элементы $a_{1n}, a_{2,n-1}, ..., a_{n1}$ - **побочную**.

Например,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \mathbf{a_{33}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \mathbf{a_{13}} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & a_{23} \\ \mathbf{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Здесь элементы главной диагонали выделены синим цветом, а элементы побочной - красным.

Определение

Квадратная матрица, у которой все элементы, не стоящие на главной диагонали, равны нулю, называется **диагональной**.

Определение

Единичной матрицей называется диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единице.

Обозначение: E.

Определение

Квадратная матрица, все элементы которой, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю, называется **треугольной**.

Например,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Определение

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется **нулевой**.

Обозначение: O.

Определение

Матрица, состоящая только из одного столбца или одной строки, называется **вектором** (**вектор-столбцом** или **вектор-строкой**).

3 Линейные операции над матрицами

Определение

Две матрицы A и B называются **равными**, если они состоят из одних и тех же элементов.

Обозначение: $A = B$.

Определение

Суммой (или разностью) двух матриц одинакового размера A и B называется матрица C, элементы которой равны сумме (или разности) соответствующих элементов матриц A и B.

Обозначение: $C = A + B$, $C = A - B$.

Пример.

Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда

$C = A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{+}3 & 2{-}1 \\ 3{+}0 & 4{+}1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Определение

Произведением матрицы A **на число** α называется матрица B, каждый элемент которой есть произведение соответствующего элемента матрицы A на число α.

Обозначение: $B = \alpha \cdot A$.

Пример.

Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Тогда

$B = 2 \cdot A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{\cdot}1 & 2{\cdot}2 \\ 2{\cdot}3 & 2{\cdot}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$.

Свойства линейных операций:

1) коммутативный закон сложения матриц

$$A + B = B + A;$$

2) ассоциативный закон сложения матриц

$$A + (B + C) = (A + B) + C;$$

3) дистрибутивный закон умножения относительно сложения матриц

$$\alpha\,(A + B) = \alpha A + \alpha B;$$

4) дистрибутивный закон умножения относительно сложения чисел

$$(\alpha + \beta)\,A = \alpha A + \beta A;$$

5) ассоциативность относительно умножения чисел

$$\alpha\,(\beta A) = (\alpha\beta)\,A.$$

4 Нелинейные операции над матрицами

Определение

Матрица A называется **согласованной** с матрицей B, если число столбцов матрицы A совпадает с числом строк матрицы B.

Определение

Произведением двух согласованных матриц $A_{m\times n} = (a_{ij})$ и $B_{n\times k} = (b_{ij})$ называется матрица $C_{m\times k} = (c_{ij}) = A \cdot B$, каждый элемент которой равен сумме произведений элементов i-ой строки матрицы A на соответствующие элементы j-ого столбца матрицы B, т.е.

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$$

Пример. Найти $A \cdot B$ и $B \cdot A$ (если они существуют):

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Матрицы $A_{2\times 2}$ и $B_{2\times 3}$ являются согласованными. В результате умножения A на B получится матрица размера 2×3:

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 3\cdot1+1\cdot3 & 3\cdot2+1\cdot1 & 3\cdot1+1\cdot0 \\ 4\cdot1+2\cdot3 & 4\cdot2+2\cdot1 & 4\cdot1+2\cdot0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 10 & 10 & 4 \end{pmatrix}$.

Матрицы $B_{2\times 3}$ и $A_{2\times 2}$ не являются согласованными, поэтому произведение $B \cdot A$ не существует.

Свойства операции умножения:

1) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$;
2) $A \cdot (B + C) = AB + AC$, $(A + B) \cdot C = AC + BC$;
3) $(\alpha A) \cdot B = \alpha\,(A \cdot B)$;
4) в общем случае $A \cdot B \neq B \cdot A$;
5) $A \cdot E = E \cdot A = A$.

Определение

n-ой степенью матрицы A называется матрица A^n, равная $A \cdot A \cdot ... \cdot A$ (n раз). При этом полагают, что $A^0 = E$.

Определение

Матрица, полученная из матрицы A заменой каждой ее строки столбцом с соответствующим номером, называется **транспонированной** к A.

Обозначение: A^T.

Пример. Если $A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, то $A^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 9 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Определение

Операция нахождения транспонированной матрицы называется **транспонированием матрицы.**

Свойства операции транспонирования:

1) $(A^T)^T = A$;
2) $(A+B)^T = A^T + B^T$;
3) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$;
4) $(\alpha A)^T = \alpha \cdot A^T$.

Определение

Квадратная матрица A называется **симметрической (или симметричной)**, если она не изменяется в результате транспонирования, т.е. $A^T = A$.

5 Элементарные преобразования матриц

Определение

Следующие преобразования матриц будем называть **элементарными**:

1) перестановка местами двух параллельных рядов (строк или столбцов) матрицы;

2) умножение всех элементов ряда на число, отличное от нуля;

3) прибавление ко всем элементам ряда матрицы соответствующих элементов параллельного ряда.

Определение

Две матрицы A и B называются **эквивалентными**, если одна из них получается из другой с помощью элементарных преобразований.

Обозначение: $A \sim B$.

6 Ступенчатая матрица

Определение

Ступенчатой называется матрица, у которой все ненулевые строки располагаются над всеми нулевыми строками и первый ненулевой элемент каждой ненулевой строки располагается правее первого ненулевого элемента предыдущей строки.

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 7 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Всякую матрицу с помощью элементарных преобразований можно привести к ступенчатому виду.

Пример. Привести к ступенчатому виду матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & -3 \\ 2 & 4 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Воспользуемся элементарными преобразованиями строк:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & -3 \\ 2 & 4 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \overset{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \overset{(2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 9 & 3 \end{pmatrix} \overset{(3)}{\sim}$$

$$\overset{(3)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 10 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \overset{(4)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \overset{(5)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \overset{(6)}{\sim}$$

$$\overset{(6)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Проведены следующие элементарные преобразования:

(1) переставили местами первую и вторую строки;

(2) прибавили к четвертой строке третью;

(3) прибавили к третьей строке первую, умноженную на -2, и четвертую строку поделили на 3;

(4) поделили третью строку на 5 и переставили местами третью и четвертую строки;

(5) к третьей строке, умноженной на -3, прибавили вторую строку;

(6) к четвертой строке прибавили третью.

Видно, что матрица, полученная из матрицы A указанными элементарными преобразованиями, имеет ступенчатую форму с тремя ненулевыми строками.